الجمهورية اليمنية
وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة الأندلس للعلوم والتقنية

جامعة الأندلس للعلوم والتقنية 2003 ١٤٢٤
Alandalus University For Science & Technology

رياضيات العلوم الإدارية

(عن بعد)

مع تحيات مركز فرات للخدمات الطلابية جامعة الأندلس

الجمهورية اليمنية

جامعة الأندلس للعلوم والتقنية

رياضيات العلوم الإدارية

إعداد/

أ / صلاح سالم مشمع باوزير

أ / أسامة سالم مشمع باوزير

www.andalusuniv.net\moodle

محتويات المقرر

المقدمة

الحمد لله والصلاة والسلام على أشرف المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .

عزيزي الدارس نرحب بك معنا لتشاركنا باطلاعك ودراستك لهذا المقـــرر ((**رياضيات العلوم الإدارية**)) ، حيث حرصنا على أن يتناسب هذا المقرر مع قدراتك ونمط تعلمك وهو التعلم عن بعد وذلك بتفصيل بعض الخطوات ولكن ليس إلى درجة الملل .

كما ركزنا على المسائل الرياضية والذهنية الخاصة بكلية العلوم الإداريـــة بأقـــسامها المختلفة إحصاء ، محاسبة .... والتي تفيدك في حل المشكلات التي قد تعترضك في المراحل اللاحقة .

فوزعنا المقرر إلى ست وحدات حيث قسمت الوحدات إلى اثني عشر محاضرة حيـــث تحتوي الوحدة الأولى على محاضرتين الأولى متعلقة بالأسس والجذور والثانيـــة خصـــصت للوغاريتمات وما يتعلق بها من مسائل تنمي قدرة الطالب على التحليل .

وقسمت الوحدة الثانية إلى محاضرتين حوت الأولى على طرق العد و التباديل بمـــا في ذلك المضروب حيث يساعدنا ذلك مستقبلاً في الإحصاء وخصوصاً نظرية الاحتمـــالات . أما المحاضرة الأخرى فتركناها للتوافيق .

أما الوحدة الثالثة فخصصت لها محاضرة واحدة فكانت لدراسة نظرية ذات الحـــدين وما تحتويه من معلومات تحليلية تعين الطالب على حل كثير من الأمور .

وعند مرورنا على الوحدة الرابعة نجد أنها قسمت إلى محاضرتين ففي الأولى تناولنـــا المتسلسلات والمتواليات الحسابية حيث تفيدنا في حل بعض مسائل الرياضة مالية خصوصا احتساب جملة الفوائد وغيرها من المسائل ، كما أن المحاضرة الثانية جعلناهـــا للمتواليـــات الهندسية .

أما الوحدة الخامسة فهي محاضرتين ففي الأولى أخذنا المصفوفات وتركنـــا الأخـــرى للمحددات فنتعرف على أنواعها وكيفية ضربها مع ربطها بالمعادلات .

والتفاضل والتكامل خصصنا له الوحدة السادسة والأخيرة ولما له من أهميـــة عمليـــة فخصصنا له ثلاث محاضرات مع تركيزنا هنا على بعض المسائل المحاسبية والاقتصادية الـــتي تفيد في احتساب الإيرادات والأرباح .....

عزيزي الدارس نرجو منك أن تشمر عن ساعديك وتتعامل مع المنهج بجدية مع حل كـــل تدريب والتمارين المرفقة بكل وحدة ، وختاما نأمل أن يكون هذا المقرر قد حـــوى علـــى جانب مناسب من المتعة وأن يكون خفيف الظل على قلبك وذهنك .

ونسأل الله أن يتقبل منا هذا العمل والله ولي الهداية والتوفيق .

الوحدة الأولى

الأسس والجذور واللوغاريتم

الموضوع	الصفحة
	٢٣

تمهيد

عزيزي الدارس مرحباً بك إلى الوحدة الأولى من مقررنا رياضيات العلوم الإدارية حيث قسمت هذه الوحدة إلى محاضرتين حوت الأولى منها على موضعين تطرق أولاهما إلى الأسس والآخر إلى الجذور .

أما المحاضرة الثانية فخصصت للوغاريتمات .

أهداف الوحدة :ـ

عزيزي الدارس بعد دراستك لهذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على :ـ

١ ــ معرفة الأسس وكيفية حل المسائل المتعلقة بها .

٢ ــ معرفة الجذور وكيفية حل المسائل المتعلقة بها .

٣ ــ معرفة الدالة اللوغاريتمية وحل مسائلها .

٤ ــ معرفة اللوغاريتم العشري .

المحاضرة الأولى

الأسس والجذور Roots & Exponcnts

تمهيد

أهلا بك عزيزي الدارس في محاضرتنا الأولى من مقرر رياضيات العلوم الإدارية حيث سنأخذ في هذه المحاضرة موضوعين أولاً الأسس ، مفهومها وقوانينـــها وكيفيـــة الاستفادة مننها في حل المعادلات الأسية . كما سنأخذ ثانياً الجذور وتحليلها مع ربطها بالأسس . كما عملنا بعض التقويمات والتدريبات التي تساعدك على هضم المـــادة . بالإضافة إلى تمارين تقييميه تساعد على تثبيت معلوماتك .

أهداف المحاضرة :ـ

عزيزي الدارس بعد دراستك لهذه المحاضرة ينبغي أن تكون لك القدرة على :ـ

١ ــ تحديد مفهوم الأسس .

٢ ــ حل المسائل المتعلقة بالأسس .

٣ ــ حل المعادلات الأسية .

٤ ــ معرفة مفهوم الجذور .

٥ ــ حل المسائل المتعلقة بالجذور .

المحتوى العلمي :-

سنتناول أخي الدارس في هذه المحاضرة مفهوم الأسس وقوانين الأسس الصحيحة وكيفية حل المعادلات الأسية كما سنتناول الجذور وقوانينها وذلك حسب التفصيل الآتي :-

تعريف الأسس .

قوانين الأسس الصحيحة .

استخدام الأسس في حل المعادلات .

تقويم + تدريب .

تعريف الجذور .

قوانين الجذور .

تقويم + تدريبات .

تمارين .

قراءات مساعدة :-

لمزيد من الاطلاع عليك بزيارة المواقع التالية :-

WWW.hassona1.Jeeran.com

WWW.ou.cu.edu.eg

أولاً : الأسس Exponents

تعريف الأسس

الأس هو تعبير لفظي لعدد مرات ضرب مقدار ثابت في نفسه . فمثلا إذا قمنا بضرب العدد (2) في نفسه ثلاث مرات أي $2 \times 2 \times 2$ فيمكن وضع عملية الضرب هذه في صورة مختصرة كما يلي 2^3 وتقرأ اثنين أس ثلاثة أو اثنين مرفوع القوة ثلاثة .

وبصفة عامة إذا كان لدينا عدد حقيقي (x) مضروباً في نفسه (n) من المرات فيمكن التعبير عن ذلك في صورة مختصرة كما يلي (x^n) حيث أن : ـ

$$\boxed{x^n = x \cdot x \cdot x \ldots\ldots x_n}$$

حيث أن : n ← الأس وهو أحد الأعداد الحقيقية الموجبة أو السالبة الصحيحة أو الكسرية .

x ← الأساس وهو أحد الأعداد الحقيقة الموجبة أو السالبة الصحيحة أو الكسرية .

قوانين الأسس الصحيحة : ـ

هناك مجموعة من القواعد والقوانين التي تساعد في معالجة الأسس نأخذ بعضا منها : ـ

قانون (1) : ـ

$$\boxed{x^1 = x}$$

مثلا : $5^1 = 5$

قانون (2) : ـ

$$\boxed{x^{n-m} = \frac{x^n}{x^m}}$$

مثلا :

$$\frac{x^7}{x^5} = x^{7-5} = x^2$$

أو

$$\frac{5^4}{5^2} = 5^{4-2} = 5^2 = 5 * 5 = 25$$

قانون (3) :ـ $\boxed{x^0 = 1}$

$$x^0 = x^{1-1} = \frac{x}{x} = 1$$

مثلاً :ـ $7^0 = 1$

قانون (4) :ـ $\boxed{x^n \bullet x^m = x^{n+m}}$

مثلاً : $x^2 \bullet x^3 = x^{2+3} = x^5$

أو $2^3 \bullet 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$

قانون (5) :ـ $\boxed{(x^n)^m = x^{n \times m}}$

ويعني هذا القانون إذا كانت (X^n) مرفوعة القوة إلى قوة أخرى لتكن (m) فإن المقدار الناتج عبارة عن الأساس مرفوع لحاصل ضرب القوسين m × n .

مثلا $(x^3)^2 = x^{3 \times 2} = x^6$

أو $(4^2)^5 = 4^{2 \times 5} = 4^{10}$

قانون (6) :ـ $\boxed{(x.y)^n = x^n \times y^n}$

مثلا : $(2 \times 5)^3 = 2^3 \times 5^3 = 8 \times 125 = 1000$

قانون (7) :ـ $\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}}$

مثلاً : ـ $\left(\frac{6}{3}\right)^2 = \frac{62}{32} = \frac{36}{9} = 4$

قانون (8) : ـ $\boxed{x^{-n} = \frac{1}{x^n}}$

ويعني هذا القانون أن تقوم بتحويل المقدار إلى مقام وتغير إشارة الأس إلى موجب .

قانون (9) : ـ $\boxed{\frac{1}{x^{-n}} = x^n}$

أي أن $\frac{1}{x^{-n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}} = 1 \times \frac{x^n}{1} = x^n$

قانون (10) : ـ $\boxed{\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n}}$

أمثلة عامة

مثال (1) أوجد قيمة المقادير التالية : ـ

أ) $x^{11} \bullet x^{-5}$

ب) $\frac{x^{-2} \bullet y^3}{F^{-2}}$

ج) $\frac{x^2 \bullet y^8}{x^3 \bullet y^5}$

الحل : ـ

أ) $x^{11} \bullet x^{-5} = x^{11-5} = x^{6}$

ب) $\dfrac{x^{-2} \bullet y^{3}}{F^{-2}} = \dfrac{\frac{1}{x^{2}} \bullet y^{3}}{\frac{1}{F^{2}}} = \dfrac{1}{x^{2}} \bullet y^{3} \bullet F^{2} = \dfrac{y^{3} \bullet F^{2}}{x^{2}}$

جـ) $\dfrac{x^{2} \bullet y^{8}}{x^{3} \bullet y^{5}} = \dfrac{y^{8} \bullet y^{-5}}{x^{3} \bullet x^{-2}} = \dfrac{y^{8-5}}{x^{3-2}} = \dfrac{y^{3}}{x}$

استخدام الأس في المعادلات : ـ

وتأخذ المعادلة الصورة التالية $a^{x} = c$

مثال : ـ أوجد قيمة X التي تحقق المعادلات الآتية : ـ

أ) $2^{x+5} = 8$

ب) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(3\dfrac{3}{8}\right)^{2}$

الحل : ـ

أ)

$2^{x+5} = 8$

$2^{x+5} = 2^{3} \rightarrow (2 \times 2 \times 2)$

.. الأساس متساوين

$x + 5 = 3 \therefore$

$x = 3 - 5 = -2$

ب)

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(3\,\frac{3}{8}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(\frac{27}{8}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(\frac{8}{27}\right)^{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\right)^{2}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{x+5} = \left(\frac{2}{3}\right)^{6}$$

الأسس متساوية

$$\because\ x + 5 = 6$$

$$\therefore\ x = 6 - 5 = 1$$

تقويم ذاتي

١ ـ عرف الأسس .

٢ ـ أكتب عشرة قوانين يمكن استخدامها في حل المعادلات .

تدريبات

تدريب (1) أكمل إلى الجواب النهائي :.

$$\left(x^{\frac{5}{9}} \bullet y^{\frac{4}{3}}\right)^{18} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x^{10} \bullet y^{24}$$

تدريب (2) أوجد :.

$$3^{2+x} = 81$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x = 2$$

ثانياً : الجذور Roots

هو وحدة العدد المأخوذة من تحليل العدد إلى حاصل ضرب مقادير متساوية فمثلاً $3 \times 3 = 9$ فوحدة العدد (3) تسمى جذر مأخوذ من تكرار العدد (3) مرتين وبذلك يسمى الجذر التربيعي أو الثاني لأصل العدد 9 كما يلي : ـ

$$\boxed{\sqrt[n]{x}}$$

حيث أن x ← المقدار المطلوب جذره .

n ← دليل الجذر أي التربيعي أو الثالث أو الرابع ..... والجذور تمثل الأسس الكسرية حيث يعبر عنها كما يلي : ـ

$$\boxed{\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}}$$

قوانين الجذور : ـ

هناك بعض القوانين التي تساعدنا تبسيط ومعالجة الجذور منها : ـ

1) $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

2) $x^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$

3) $\sqrt[n]{x} \bullet \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$

4) $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$

5) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \times n]{x}$

6) $\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$

7) $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

مثال (1) أحسب الآتي : ـ

1) $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}}$

2) $\sqrt[4]{16}$

الحل : ـ

1) $\sqrt[3]{-\dfrac{64}{27}} = \sqrt[3]{\left(-\dfrac{4}{3}\right)^3} = -\dfrac{4}{3}$

2) $\sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$

مثال (2) أوجد قيمة المقادير التالية : ـ

1) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}}$ 2) $\left(-\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}}$

الحل : ـ

1) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\dfrac{1}{4}\right)^3} = \sqrt{\left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\right)^3} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^3 = \dfrac{1}{8}$

2) $\left(-\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{4}{3}} = \sqrt[3]{\left(-\dfrac{8}{27}\right)^4} = \sqrt[3]{\left(\left(-\dfrac{2}{3}\right)^3\right)^4} = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^4 = \dfrac{16}{81}$

مثال (3) اختصر المقادير الآتية : ـ

1) $\sqrt[4]{48}$ 2) $\sqrt[3]{x^6 \bullet y^4}$ 3) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}}$

الحل : ـ

1) $\sqrt[4]{48} = \sqrt[4]{3 \times 16} = \sqrt[4]{3} \bullet \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{3} \bullet \sqrt[4]{2^4} = 2\sqrt[4]{3}$

2) $\sqrt[3]{x^6 \bullet y^4} = \sqrt[3]{\left(x^2\right)^3 \bullet (y)^3 \bullet y}$

$= \sqrt[3]{\left(x^2\right)^3} \bullet \sqrt[3]{y^3} \bullet \sqrt[3]{y} = x^2 y \sqrt[3]{y}$

3) $\dfrac{\sqrt{20}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\dfrac{20}{5}} = \sqrt{4} = 2$

تقويم ذاتي

١ ـ عرف الجذور .
٢ ـ أكتب خمسة قوانين يمكن استخدامها في تبسيط ومعالجة الجذور .

تدريب

أكمل ما يلي : .

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^{3}}$$

....

....

....

$$= \frac{1}{8}$$

الخلاصة : -

بعد دراستنا لهذه المحاضرة الأولى اتضح لنا أن الأسس ما هي إلا عبارة عن ضرب مقدار ثابت في نفسه عدد من المرات كما اتضح لنا كيفية التعامل مع قوانين الأسس وحل المعادلات الأسية . كما تعرفنا على الجذور حيث اكتشفنا أنها عملية تحليلية للعدد وهي عكسية للأسس .

تمرين

1) أوجد قيمة المقادير الآتية : ــ

$a)\ x^6 \bullet x^5 \bullet x^2$ $\qquad$ $b)\ 2x^{-1} \bullet x^{-3}$

$c)\ \dfrac{(x^2)^5}{(y^2)^3}$ $\qquad$ $d)\ \dfrac{(x^2)^3 (x^3)^3}{(x^3)^4}$

$e)\ \dfrac{x^2 \bullet x^4}{y^2 \bullet y^5}$ $\qquad$ $f)\ \dfrac{x^3 \bullet y^{-2}}{m^2}$

2) حل المعادلات الآتية : ــ

$a)\ 3^{x-2} = 81$ $\qquad$ $b)\ \left(\dfrac{4}{7}\right)^{x+2} = \left(3\dfrac{1}{16}\right)^{-3}$

اوجد قيمة المقادير التالية : ــ

$a)\ \sqrt[5]{-32}$ $\qquad$ $b)\ \sqrt{0.04}$ $\qquad$ $c)\ 100^{\frac{1}{2}}$

$d)\ 27^{\frac{1}{3}}$ $\qquad$ $e)\ \sqrt[3]{2x^3}$ $\qquad$ $f)\ \sqrt{16x^4}$

المراجع :-

- مبادئ الرياضيات لطلاب الإدارة   د. ظافر حسين رشيد .
- الرياضيات البحتة   د. جاسم محمد علي .
- مبادئ في الرياضة للتجاريين   د. محمد توفيق المنصوري .

المصطلحات :-

- الأسس   **Exponcnts**
- الجذور   **Roots**

المحاضرة الثانية

اللوغاريتم Logarithms

تمهيد

نرحب بك أخي الكريم مجدداً في محاضرتنا الثانية التي سنتناول فيها اللوغاريتمات كمفهوم والدالة اللوغاريتمية وخواصها كما نعرج على اللوغاريتمات العشرية وكيفية التعامل معها والاستفادة منها في حل بعض المسائل . وفي نهاية المحاضرة هناك أسئلة تقويمية وتدريب ينبغي أن تجاوب عليه حتى تحصل الفائدة المرجوة كما ذيلنا هذه المحاضرة بتمارين .

أهداف المحاضرة : -

عزيزي الدارس بعد دراستك لهذه المحاضرة ينبغي أن تكون لك القدرة على : -

١ – معرفة الدالة اللوغاريتمية .

٢ – فهم خواص الدالة اللوغاريتمية وحل المسائل المتعلقة بها .

٣ – إدراك اللوغاريتم العشري والاستفادة منه في تبسيط كثير من المسائل الرياضية .

المحتوى العلمي : ـ

سنتناول أخي العزيز في هذه المحاضرة اللوغاريتمات بمفهومها وخواصها كما سنأخذ أيضاً اللوغاريتم العشري وذلك حسب التفصيل الآتي : ـ

- الدالة اللوغاريتمية وخواصها .
- اللوغاريتم العشري .
- تقويم ذاتي .
- تدريب .

قراءات مساعدة : ـ

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية : ـ

WWW.hassona1.Jeeran.com
WWW.ou.cu.edu.eg

اللوغاريتم Logarithms

أولاً : الدالة اللورغاريتمية وأهم خواصها : ـ

من خلال دراستنا لموضوع الأسس وصلنا إلى أن العلاقة بين الرقمين 2 ، 16 هي $16 = 2^4$ أي أن العدد 2 مضروب في نفسه أربع مرات وعليه فإن الدالة الأسية لها علاقة بالدالة اللوغاريتمية .. ففي العلاقة السابقة تعرف الأس 4 بأنه لوغاريتم العدد 16 للأساس 2 .

وعليه فإن لوغاريتم أي عدد لأساس معين هو عبارة عن القوة التي يرفع إليها الأساس لكي يكون الناتج مساوياً لذلك العدد .

ومن هنا فإن الدالة اللوغاريتمية يمكن أن تتمحور في إطار الصيغة التالية : ـ (إذا كانت (R) هي مجموعة الأعداد الحقيقية و (+R) هي مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة فإن الدالة اللوغاريتمية : ـ

$$\boxed{y = Log_a x}$$

وتقرأ y تساوي لوغاريتم X للأساس a وبصورة عامة فإن : ـ

$$\boxed{y = Log_a x \leftrightarrow x = a^y}$$

وفيما يلي نذكر بعض الخواص الأساسية للدوال اللوغاريتمية

A ـ الدالة اللوغاريتمية $\boxed{y = Log_a x}$ هي الدالة العكسية للدالة الأساس $\boxed{x = a^y}$

B ـ إذا كانت X_1 ، X_2 ينتمي إلى R^+ فإن

1) $Log_a 1 = 0$

وتعني أن لوغاريتم العدد (١) لأي أساس يساوي صفر .

2) $Log_a a = 1$

ويعني أن لوغاريتم أي عدد حقيقي موجب لأساس مساوي لذلك العدد = ١ .

3) $Log_a x_1 \bullet x_2 = Log_a x_1 + Log_a x_2$

ويعني أن لوغاريتم حاصل ضرب مقدارين أو أكثر لأساس معين يساوي مجموع لوغاريتم كل مقدار لنفس الأساس على حده .

4) $$\boxed{Log_a \frac{x_1}{x_2} = Log_a x_1 - Log_a x_2}$$

ويعني أن لوغاريتم حاصل قسمة مقدارين لأساس معين يساوي لوغاريتم البسط مطروح منه لوغاريتم المقام لنفس الأساس .

5) $$\boxed{Log_a x^n = n Log_a x}$$

ويعني لوغاريتم محدد مرفوع القوة عدد ما آخر يساوي حاصل ضرب تلك القوة في لوغاريتم العدد .

وإليك جدول يوضح العلاقة بين الصورة اللوغاريتمية والأسية : ـ

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الأساسية
$Log_4 16 = 2$	$4^2 = 16$
$Log_9 3 = \frac{1}{2}$	$9^{\frac{1}{2}} = 3$
$Log_3 \frac{1}{27} = -3$	$(3)^{-3} = \frac{1}{27}$

مثال : حل المعادلات الآتية : ـ

1) $Log_3 27 = y$ 2) $Log_5 x = 3$

الحل : ـ

1 ـ نحول إلى الصورة الأسية $\rightarrow$ $Log_3 27 = y$

$$3^y = 27$$

$$3^y = 3^3$$

$$\therefore y = 3$$

2 ـ نحول إلى الصورة الأسية $Log_5 x = 3 \rightarrow$

$$5^3 = x$$

$$\therefore x = 125$$

ثانياً : اللوغاريتم العشري

هو اللوغاريتم للأساس (10) وسنكتفي بكتابة Logx بدلاً من $Log_{10}x$ أي أننا سنحذف (10) من الآن فصاعداً .

فإذا كتب اللوغاريتم بدون أساس فيعني أن أساسه (10) ومن خلال تعريف اللوغاريتم فإننا نستنتج أن اللوغاريتمات العشرية للأعداد الصحيحة التي هي للعدد (10) تكون هي أعداد صحيحة .

وإليك توضيح ذلك : ـ

الصورة اللوغاريتمية	الصورة الاسية
$Log\ 1000 = 3$	$10^{3} = 1000$
$Log\ 100 = 2$	$10^{2} = 100$
$Log\ 10 = 1$	$10^{1} = 10$
$Log\ 1 = 0$	$1 = {}^{0}10$
$Log\ 0.1 = -1$	$10^{-1} = 0.1$
$Log\ 0.01 = -2$	$10^{-2} = 0.01$
$Log\ 0.001 = -3$	$10^{-3} = 0.001$

مثال (1) إذا كان

$$Log\ 2 = 0.3010 \qquad Log\ 3 = 0.4771 \qquad Log\ 7 = 0.8401$$

أوجد قيمة : 1) $Log\ 21$ 2) $Log\ 42$

الحل : ـ

1) $Log\ 21 = Log\ 7 \times 3 = Log\ 7 + Log\ 3$

$= 0.8451 + 0.4771 = 1.3222$

2) $Log\ 42 = Log\ 21 \times 2 = Log\ 21 + Log\ 2$

$= 1.3222 + 0.3010 = 1.6232$

مثال (2) إذا كان $Log\ 3.411 = 0.5329$ فأوجد :

1) $Log\,34.11$ 2) $Log\,0.311$

الحل : ـ

1)

$$Log\,34.11 = Log\,(3.411 \times 10)$$
$$= Log\,3.411 + Log\,10 = 0.5329 + 1$$
$$= 1.5329$$

2)

$$Log\,0.311 = Log\,3.411 \times 10^{-1}$$
$$= Log\,3.411 + Log\,10^{-1}$$
$$= 0.5329 + (-1) = -0.4671$$

تقويم ذاتي

- ماذا يقصد باللوغاريتم العشري ؟

تدريب

أكمل : ـ

$$Log_5 625 = y$$

....

....

....

$$y = 4$$

الخلاصة :-

بعد دراستنا للوغاريتمات اتضح لنا أن الدالة اللوغاريتمية هي دالة عكسية للدالة الأسية وأنها تتمحور في إطار مجموعة الأعداد الحقيقية كما أفادتنا خواص اللوغاريتم (قوانين) في حل كثير من المسائل .

وعرفنا أنه يمكننا أن نكتب اللوغاريتم دون أساس إذا كان أساسه العدد **10** وهو ما يعرف باللوغاريتم العشري .

تمارين

1) حل المعادلات الآتية : ـــ

$a)\, Log_3 81 = y \qquad b)\, Log_2 x = -4 \qquad c)\, Log_a 49 = 2$

2) إذا كان

$Log\,2 = 0.3010 \qquad Log\,3 = 0.4771 \qquad Log\,7 = 0.8451$

فأوجد ما يلي : ـــ $a)\, Log\,14 \quad b)\, Log\,70$

المراجع :-

ـ الرياضيات البحتة د. جاسم محمد علي .

ـ مبادئ الرياضيات وتطبيقاتها تأليف د. قاسم النعيمي ، مركز الأمين ٢٠٠١م .

المصطلحات :-

ـ لوغاريتم **Logarithm**

ـ لوغاريتم **Log**

الوحدة الثانية

طرق العد

تمهيد

عزيزي الدارس نرحب بك في الوحدة الثانية من مقرر الرياضيات للعلوم الإدارية والموسومة بطرق العد إذ اشتملت هذه الوحدة على محاضرتين .

المحاضرة الأولى على جزئين أولاهما سيكون مخصص لطرق العد كمفهوم بالإضافة إلى المضروب والتدريب أما الجزء الثاني فيكون للتباديل .

والمحاضرة الثانية سندرس فيها التوافيق وقواعده .

أهداف الوحدة :ـ

بعد دراستك لهذه الوحدة ينبغي أن تكون عزيز الدارس قادراً على :ـ

١ ـــ استيعاب مفهوم الترتيب .

٢ ـــ حل مسائل المضروب .

٣ ـــ معرفة مفهوم التباديل وحل المسائل المتعلقة به .

٤ ـــ معرفة التوافيق وحل المسائل المتعلقة به .

٥ ـــ حل بعض المسائل والمشاكل المرتبطة بالإحصاء وخصوصاً نظرية الاحتمالات .

المحاضرة الثالثة

طرق العد والتباديل *Counting Methods & Permutations*

تمهيد

أهلاً بك عزيزي الدارس إلى المحاضرة الثالثة من مقررنا رياضيات العلوم الإدارية حيث سنقسم هذه المحاضرة إلى جزئين الجزء الاول سيخصص لمفهوم طرق العد بما في ذلك الترتيب والمضروب . أما الجزء الثاني فسنتناول فيه التباديل وقوانينه بما في ذلك التبادل بين مجموعات الأشياء المتشابهة والترتيب الدائري وقد أردفنا ذلك بأمثلة ممتعة ، كما أن هناك تقويم ذاتي وتدريب فشمّر عن ساعديك واقرأ بتمحص وحل التمارين الموجودة لمعرفة مدى استيعابك لهذه المحاضرة .

أهداف المحاضرة :ـ

أخي الدارس بعد إطلاعك على هذه المحاضرة ينبغي أن تكون قادراً على :ـ

١ ـــ استيعاب مفهوم طرق العد .

٢ ـــ حل المسائل المتعلقة بالمضروب .

٣ ـــ فهم التباديل فهما جيداً واستيعاب قوانينه وحل مسائله .

٤ ـــ حل بعض المشاكل الواقعية الخاصة بالترتيب وعدد الإحتمالات .

المحتوى العلمي : ـ

سندرس في هذه المحاضرة طرق العد من ترتيب ومضروب ، كما سنأخذ أيضاً التباديل وذلك حسب التفصيل الآتي : ــ

مفهوم طرق العد .

- الترتيب .
- المضروب .

التباديل .

التبادل بين مجموعات الأشياء المتشابهة .

الترتيب الدائري .

تقويم ذاتي .

تدريب .

قراءات مساعدة : ـ

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية : ـ

WWW.hassona1.Jeeran.com
WWW.ou.cu.edu.eg

طرق العد والتباديل

Counting Methods & Permutations

المحاضرة الثالثة

أولاً : طرق العد Counting Methods

تهتم دراسة طرق العد (التباديل والتوافيق) بتحديد الطرق المختلفة لعرض مجموعة العلاقات الكلية أو الفردية أو الفرعية المنبثقة من مجموعة أساسية من الأرقام أو المتغيرات وبالتالي فإن هذه الدراسة تعتبر المدخل لنظرية الاحتمالات . كما تعتبر المدخل الأساسي في دراسة التوزيع العددي للحدود المكونة لمفكوك نظرية ذات الحدين .

وإليك مثال مبسط يوضح أهمية هذه الدراسة .

إذا كان لدينا 100 طالب تم اختيارهم عشوائي من بين طلبة الجامعة وجمعت عنهم بيانات عن طبيعة دراستهم (عملية أو نظرية) كذلك عن حالة سكنهم بالمدينة الجامعية أو خارجها .وأمكن توزيع هؤلاء الطلبة حسب الخصائص المذكورة في الجدول التالي : ـ

الدراسة / السكن	نظرية	عملية	المجموع
المدينة الجامعية	6	4	10
خارجها	64	26	90
المجموع	70	30	100

فيمكن أن نستلخص من هذا التوزيع العلاقات التالية : ـ

1 ـ (6) طلبة دراستهم نظرية ويسكنون بالمدينة الجامعية .

2 ـ (64) طالب دراستهم نظرية ويسكنون خارج المدينة الجامعية .

3 ـ (4) طلاب دراستهم عملية ويسكنون بالمدينة الجامعية .

4 ـ (26) طالب دراستهم عملية ويسكنون خارج المدينة الجامعية .

وهذا يعني أن هناك أربع حالات يمكن أن يدرج الطالب الواحد تحتها ، أي أن عـدد طـرق توزيع الطلبة أربع طرق كما يلي : ـ

ـ طريقتين حسب نوع الدراسة (نظرية ـ عملية) .

ـ طريقتين حسب طبيعة السكن (المدينة الجامعية ـ خارجها)

وبالتالي يكون عدد الطرق الممكنة لتوزيع الطلبة حسب مكونات الخصائص المطلوبة $4 = 2 \times 2$

أي أربع طرق ومن هذا المثال نستطيع أن نخلص إلى مجموعة من القواعد للعد : ـ

القاعدة (1)

إذا أمكن إجراء عملية معينة (توزيع الطلبة حسب نوع الدراسة مثلاً) بطرق عددها (n_1) وأمكن في نفس الوقت إجراء عملية أخرى (توزيع نفس الطلبة حسب طبيعة السكن) بطرق عددها (n_2) فإنه يمكن إجراء العمليتين معاً بطرق عددها ($n_1 \times n_2$) .

وبشكل عام إذا كان هناك طرق عددها (r) من العمليات وأمكن إجراء العملية الأولى بطرق عددها (n_1) والثانية بطرق عددها (n_2) والثالثة بطرق عددها (n_3) ..... و هكذا .

فإنه يمكن إجراء العمليات كلها معاً بطرق عددها

$$n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots\cdots \times n_r$$

مثال : ـ كم عدداً ثلاثياً يمكن تكوينه من الأرقام 3 ، 2 ، 1

الحل : ـ

المطلوب هو عدد الطرق الممكنة لترتيب هذه الأرقام وبذلك يكون لدينا ثلاث خانات (آحاد ، عشرات ، مئات) .وبمجرد ملء خانة الآحاد بأحد الأرقام الثلاثة أي بطـرق عـددها (3) يتبقى رقمين اثنين يمكن ملء خانة العشرات بأحدهما بطرق عددها (2) وبذلك يبقى رقـم واحد يشغل خانة المئات (خانة واحدة) ويتم ذلك بطرق عددها (١) .

. . مجموع الطرق الممكنة تكون طرق $3 \times 2 \times 1 = 6$

يمكن توضيحها كما يلي : ـ

213	132	321
312	231	123

الترتيب : ـ

ويقصد به وضع مفردات مجموعة من الأشياء (أرقام ، قيم ، أشـــخاص ....) في عدد من الأماكن أو الأوضاع مساوٍ لعدد مفردات هذه المجموعة .

مثلاً : ـ إذا أريد ترتيب الحروف الثلاثة a , b , c في الأماكن الثلاثة

1	2	3

فإذا بدأنا بالحرف a فيمكن وضعه في المكان 1 المكان 2 المكان 3 كما يلي : ـ

a	أو a	أو a

وبالتالي فإن وضع (a) في الأماكن يتم بطرق عددها 3 . وعندما يستقر a في أحد الأماكن فيتبقى لوضع b مكانين فقط كما يلي .

a	b	أو b

وبذلك فإن وضع (b) في مكان يمكن أن يتم بطريقتين (2) وعندما يـــستقر كـــل مـــن (a , b) في مكانين فيتبقى مكان واحد فقط للحـــرف (c) أي

a	b	c

وضع (c) تم بطريقة واحدة فقط .

وباستخدام القاعدة السابقة فإن عدد طرق ترتيب a , b , c تكون طـــرق 6 = 1 × 2 × 3 وهو كما يلي : ـ

الطريقة	الرف الأول	الرف الثاني	الرف الثالث
1	a	b	c
2	a	c	b
3	b	a	c
4	b	c	a
5	c	a	b
6	c	b	a

ومن المثال السابق يمكن الوصول إلى القاعدة الثانية .

القاعدة (2)

إذا أريد ترتيب (n) من الأشياء المختلفة فيما بينها فإن عدد الطرق التي يمكن ترتيبها بها هي : ـ

$$n\times(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots\times 3\times 2\times 1$$

وهذا ما يعرف بالمضروب أي مضروب (n) ويرمز له بالرمز $\underline{n|}$ أو ! n وهـــو مـــا سنتعرف عليه بعد هذا المثال

مثال :ـ كم طرق ترتيب 5 كتب على رف واحد ؟

الحل :

عدد الطرق = طريقة $120 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5$

المضروب :ـ هو رمز جبري مختصر لحاصل ضرب متسلسلة من الأعداد الطبيعية تبدأ دائما بالعدد الأكبر وتقل بمقدار واحد صحيح حتى الوصول إلى العدد واحد .

ويرمز له بالرمز $\underline{\;\;}|$ أو !

فمثلا مضروب 10 أو ! 10

$$10\,! = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$$

صيغة المضروب

$$\boxed{n! = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots \times 3 \times 2 \times 1}$$

نتائـج

1) $1\,! = 1$

2) $0\,! = 1$

مثال :ـ أحسب ما يلي : ـ

1) $\dfrac{5!}{3!}$ 2) $\dfrac{20\,!}{18\,!}$ 3) $\dfrac{m\,!}{(m-1)!}$ 4) $\dfrac{4!\times 6!}{5!}$

الحل :

1) $\dfrac{5!}{3!} = \dfrac{5 \times 4 \times 3!}{3!} = 5 \times 4 = 20$

2) $\dfrac{20\,!}{18\,!} = \dfrac{20 \times 19 \times 18\,!}{18\,!} = 20 \times 19 = 380$

3) $\dfrac{m\,!}{(m-1)!} = \dfrac{m \times (m-1)!}{(m-1)!} = m$

4) $\dfrac{4!\times 6!}{5!} = \dfrac{4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 6 \times 5!}{5!} = 144$

ثانياً : التباديل Permutations

تعريف التباديل : ـ

هي طرق الاختيار المرتب لمفردات مجموعة جزئية من الأشياء من نفس مفردات مجموعتها الكلية .

القاعدة (1)

إذا كان لدينا مجموعة كلية من الأشياء المختلفة عددها (n) فإنه يمكن ترتيب مجموعات جزئية عدد مفرداتها (r) بالطريقة التالية

$$P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

حيث أن

رمز تباديل $P \rightarrow$

عدد المفردات الكلية $n \rightarrow$

عدد المفردات المطلوب الحصول عليها $r \rightarrow$

وفي هذه الحالة يكون المطلوب تحديد الطرق التي يمكن بها الحصول على أشياء عدد مفرداتها (r) مرتبة فيما بينها وكأنها لدينا عدد (r) من الخانات ويراد ملؤها وسوف نعتبر ملء كل خانة من هذه الخانات عملية .

وبذلك يصبح لدينا عمليات عددها (r) يتم ملء الخانة الأولى بطرق عددها (n) وذلك لأن كل مفردة من مفردات المجموعة الكلية (n) يمكن أن تختار لهذه الخانة .

ويتم ملء الخانة الثانية بطرق عددها (n – 1) وذلك لأن الخانة الأولى قد تم ملأها والخانة الثالثة بنفس الأسلوب بطرق عددها (n-2) وهكذا باقي الخانات وبذلك فإن الخانة الأخيرة (n – r + 1) ،

مثال (1) : لدينا أربعة ألوان (أحمر ــ أسود ــ أخضر ــ أبيض) نريد أن نعمل علم مكون من لونين فكم طريقة يمكن ترتيب ألوان العلم .

الحل : ــ

عدد المفردات الكلية (n) = 4 ألوان

عدد المفردات المطلوب الحصول عليها (r) = 2 ألوان

$$\because P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$\therefore P_2^4 = 4(4-2+1) = 4 \times 3 = 12$$ طريقة

مثـال (2) : في أحد المدارس خصصت جوائز للأول والثاني فقط فـإذا تـسابق الطــلاب (محمد وأحمد وخالد وسعيد وصالح) فأوجد عدد الطريق الممكنة لترتيب الأول والثاني ؟

الحل : ــ

عدد المفردات الكلية (n) = 5

عدد المفردات المطلوب الحصول عليها (r) = 2

$$\because P_r^n = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$$

$$\therefore\ P_2^5 = 5(5-2+1) = 5\times 4 = 20$$

وعند احتساب طرق التباديل مباشرة فإن القانون التالي يساعدنا على ذلك

$$\boxed{P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}}$$

ويمكن إثبات ذلك القانون كالآتي : ــ

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)\cdots\times 3\times 2\times 1$$

$$n! = [n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)][(n-r)(n-r-1)\cdots\times 3\times 2\times 1]$$

$$n! = P_r^n \times (n-r)! \qquad /\div (n-r)!$$

$$\therefore\ P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

مثال (3) : كم عدد ثلاثي يمكن تكوينه من الأرقام 5 ,4 , 3 , 2 , 1

الحل : ــ

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_3^5 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5\times 4\times 3\times 2!}{2!} = 60$$

مثال (4) : مصنع به ٢٠ عامل كم طريقة يمكن اختيار نقابة عمالية مكونـة مـن رئـيس ونائب وأمين عام أي ثلاثة أعضاء للإدارة.

الحل : ــ

$$P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P_3^{20} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20\times 19\times 18\times 17!}{17!} = 20\times 19\times 18 = 6840$$

التباديل بين مجموعات الأشياء المتشابهة

القاعدة (2)

إذا كان لدينا (n) من الأشياء من عدة مجموعات متشابهة فيما بينها الأولى عدد (X) والثانية عددها (y) والثالثة عددها (m) ....

حيث أن .... n = x + y + m

فان عدد طرق تبادل هذه الأشياء عندما تأخذ مرة واحدة يكون

$$\boxed{\frac{n!}{x! \cdot y! \cdot m!}}$$

مثال : كلمة نقانق تتكون من الحروف (ن ، ق ، ا ، ن ، ق) وهي خمسة حروف ما هي الطرق التي يمكن أن ترتب بها هذه الحروف ؟

الحل : ـــ

نلاحظ أن حرف النون متشابه وهي مجموعة والقاف أيضا يشكل مجموعة من حرفين متشابهين والألف يشكل مجموعة لحالها .

. . طرق ترتيب الحروف يكون

$$\frac{n!}{x! \cdot y! \cdot m!} = \frac{5!}{2! \times 2! \times 1!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2! \times 2 \times 1 \times 1} = \frac{60}{2} = 30 \quad \text{طريقة}$$

الترتيب الدائري

يمكن وضع (n) من الأشياء المختلفة في ترتيب دائري بطرق عددها ! (n − 1) مع الملاحظة أن الترتيب الدائري ليس له بداية محددة وبالتالي لا يعتبر التحرك الدائري للمجموعة ترتيب ولكن يعتبر ترتيب عندما تختلف الأوضاع بين المجموعة .

مثال (1) : بكم طريقة يمكن أن يجلس أعضاء مجلس إدارة شركة مكونة من 8 أشخاص حول مائدة اجتماع مستديرة إذا كان لا توجد أي قيود على حرية اختيار الشخص لمكان حول المائدة .

الحل :

$$(n-1)! = (8-1)! = 7! = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 5040$$

مثال (2) : أوجد قيمة (n) إذا كان $7 \times P_3^n = 6 \times P_3^{n+1}$

الحل : ـــ

$$7 \times n(n-1)(n-2) = 6 \times (n+1)(n+1-1)(n+1-2)$$

$$7n(n-1)(n-2) = 6(n+1)(n)(n-1) \qquad / \div (n-1)(n)$$

$$7(n-2) = 6(n+1)$$

$$7n - 14 = 6n + 6$$

$$7n - 6n = 6 + 14$$

$$n = 20$$

تقويم ذاتي

ـ ما المقصود بالترتيب ؟

ـ ما هي صيغة المضروب ؟

تدريب

مجموعة مكونة من تسعة من مديري عموم أحد الوزارات بينهم مدير يدعى خالد ونريد أن تختار منهم ثلاثة لترقيتهم . أحدهم نائب أول للوزير والآخر نائب ثاني وآخر نائب ثالث للوزير بكم طريقة يتم هذا الاختيار على أن يكون خالد نائب للرئيس .

الحل : ـــ

خالد يشغل نائب أول ، فيبقى لنا ثمانية مدراء ومركزين للترقية أي أن عدد المدراء الـــذين سيتم اختيارهم (n) يساوي $n = 9 - 1 = 8$ مدراء

بينما يكون عدد المراكز (r) يساوي

مركزين $r = 3 - 1 = 2$

لأن خالد يشغل أحد الترقيات

$$\therefore\ P_r^n = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots = 56$$

أكمل بقية الحل

الخلاصة : -

عزفت من خلال هذه المحاضرة ما المقصود بالترتيب وكيفية التعامل مع المضروب الذي هو عبارة عن ضرب متسلسلة من الأعداد الطبيعية تبدأ بالعدد الأكـــبر وتقـــل بمقدار واحد صحيح حتى تصل إلى الواحد ، كما عرفت عزيزي الدارس التباديل وهي الاختيار المرتب لمفردات مجموعة جزئية من الأشياء من نفس مفردات مجموعتها الكلية وكيف استفدنا من قوانين التباديل في الاحتمالات .

تمارين

1) احسب ما يلي

A) $c)\ \dfrac{6!\times 3!}{6\times 5!}$ $\quad b)\ \dfrac{(m+1)!}{(m-1)!}$ $\quad a)\ \dfrac{6!\times 4!}{3!}$

B) $P_{48}^{50}\ ,\quad P_{0}^{50}\ ,\quad P_{8}^{8}$

2) بكم طريقة يمكن ترتيب 9 كتب بفرض : ـــ

أ) أن الكتب مختلفة .

ب) أن كل ثلاثة كتب متشابهة العنوان

3) حل المعادلة التالية : ـــ $8\,P_2^{n} = 5\,P_2^{n+1}$

المراجع :-

ـ أساسيات الرياضيات البحتة (جامعة الزقـازيق) د. أحمـد فتحـي مـصطفى و د. يوسف صبري عوض

ـ الرياضيات في الاقتـصاد والتجـارة والعلـوم الإداريـة د. أحمـد الأشـقر ، عمان ٢٠٠١م

المصطلحات :-

ـ طرق العد **Counting methods**

ـ التباديل **Permutations**

المحاضرة الرابعة

التوافيق *Combinations*

تمهيد

أخي الدارس نرحب بك إلى محاضرتنا الرابعة تحت مسمى التوافيق حيث سنناقش في هذه المحاضرة التوافيق ، التي ما هي إلا عبارة عن تباديل مع عدم مراعاة الترتيب وسنتطرق إلى قواعد التوافيق مع ربطها بمجموعة من الأمثلة الشيقة كما أن هناك أسئلة تقويم ذاتي وتدريب حاول أن تخوض غمار الحل وتثبت قدراتك . ولا تنسى عزيزي الدارس التمارين آخر المحاضرة .

اهداف المحاضرة : ـ

عزيزي الدارس بعد دراستك للمحاضرة فينبغي أن تكون لك القدرة على : ـ

١ ــ معرفة مفهوم التوافيق .

٢ ــ الإلمام بقواعد التوافيق وحل المسائل المتعلقة به .

٣ ــ أن تكون لك القدرة فيما بعد لحل بعض المسائل الإحصائية خصوصاً الاحتمالات .

٤ ــ استخدام التوافيق لاحقاً في حل مسائل نظرية ذات الحدين .

المحتوى العلمي : -

سندرس في هذه المحاضرة التوافيق والقواعد المرتبطة بها وذلك حسب الآتي : -

- تعريف التوافيق .
- القواعد .
- تقويم ذاتي .
- تدريب .

قراءات مساعدة : -

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية : -

WWW.hassona1.Jeeran.com
WWW.ou.cu.edu.eg

المحاضرة الرابعة

التوافيق Combinations

تعريف التوافيق Combinations

هي عبارة عن طرق اختيار مفردات جزئية أو كلية من المفردات الكلية بغض النظر عن ترتيبها أي أن التوافيق ما هي إلا عملية تباديل بغض النظر عن الترتيب ويرمز للتوافيق بالرمز C^n_r حيث أن C رمز التوافيق ويمكن الحصول على التوافيق من التباديل وذلك لأن عملية التباديل تشمل على عمليتين :

١ ـ الاختيار غير المرتب لأشياء عدد (r) من بين أشياء عدد (n) فنحصل على C^n_r

٢ ـ عملية ترتيب الأشياء المختارة عددها (r) فيتم ترتيبها بعدد r ! من الطرق .

القاعدة (1)

التباديل يساوي لعدد طرق اختيار توافيق معينة لأشياء عدد (r) من بين أشياء عددها (n) مضروب في عدد الطرق التي يمكن بها ترتيب الأشياء المختارة أي أن : ـ

$$P^n_r = C^n_r \times r!$$

$$C^n_r = \frac{P^n_r}{r!} = \frac{\frac{n!}{(n-r)!}}{r!} = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

$$C^n_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!}$$

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار 3 أفراد من بين 9 أفراد لترقيتهم إلى رتبة أعلى ؟

الحل : ـ

$$n = 9 \qquad r = 3$$

$$C^n_r = \frac{n!}{r! \times (n-r)!} = \frac{9!}{3! \times (9-3)!} = \frac{9!}{3! \times 6!}$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6!}{3 \times 2 \times 1 \times 6!} = \frac{504}{6} = 84$$

القاعدة (2)

عدد طرق اختيار أشياء عددها (r) من (n) من الأشياء يساوي عدد طرق اختيار أشياء عددها (n – r) من (n) من الأشياء أي أن : ـ

$$\boxed{C_r^n = C_{n-r}^n}$$

ويمكن إثبات ذلك كالآتي : ـ

$$C_r^n = \frac{n!}{r!\times(n-r)!} \rightarrow (1)$$

$$C_{n-r}^n = \frac{n!}{(n-r)!\times(n-(n-r))!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!\times(n-n+r)!} = \frac{n!}{(n-r)\times r!} \rightarrow (2)$$

من (1) و (2) نستنتج أن : ـ

$$C_r^n = C_{n-r}^n$$

ونستخدم هذه القاعدة لتبسيط العمليات الحسابية

مثال (1) : أوجد قيمة ما يلي C_{97}^{100}

الحل : ـ

$$C_{97}^{100} = C_{100-97}^{100} = C_3^{100} = \frac{100!}{(100-3)!\bullet 3!}$$

$$= \frac{100\times 99\times 98\times 97!}{97!\times 3\times 2\times 1}$$

$$= \frac{970200}{6} = 161700$$

القاعدة (3)

$$\boxed{C_r^n + C_{r-1}^n = C_r^{n+1}}$$

الإثبات : ـ

$$C_r^{n+1} = \frac{(n+1)!}{r!\times(n+1-r)!} \rightarrow (1)$$

$$C_r^n + C_{r-1}^n = \frac{n!}{r!\times(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\times(n-(r-1))!}$$

$$= \frac{n!}{r!\times(n-r)!} + \frac{n!}{(r-1)!\times(n-r+1)!}$$

بضرب الكسر الاول . $\frac{(n-r+1)}{(n-r+1)}$

والثاني . $\frac{r}{r}$

$$= \frac{(n-r+1)\times n!}{(n-r+1)\times r!\times(n-r)!} + \frac{r\times n!}{r(r-1)!\times(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n-r+1)\times n!}{(n-r+1)!\times r!} + \frac{r\times n!}{r!(n-r+1)!}$$

$$= \frac{(n-r+1)\times n! + r\times n!}{(n-r+1)!\times r!} = \frac{n!(n-r+1+r)}{(n-r+1)\times r!}$$

$$= \frac{n!(n+1)}{(n-r+1)!\times r!} = \frac{(n+1)!}{r!\times(n+1-r)!} \rightarrow (2)$$

مثال (2) : أوجد قيمة ما يلي : ـ $C_5^7 + C_4^7$

الحل : ـ

$$\because C_r^n + C_{r-1}^n = C_r^{n+1}$$

$$\therefore C_5^{7+1} = C_5^8 = \frac{(7+1)!}{5!\times(7+1-5)!}$$

$$= \frac{8!}{5!\times 3!} = \frac{8\times 7\times 6\times 5!}{5!\times 3\times 2\times 1} = 56$$

القاعدة (4)

$$\boxed{C_0^n = 1} \qquad \boxed{C_n^n = 1}$$

مثال : بكم طريقة يمكن اختيار يومين إجازة من أيام الأسبوع بحيث لا يمكن الجمع بين يومي الخميس والجمعة ؟

الحل : ـ

بافتراض أنه لا يوجد شرط عند جمع يومي الخميس والجمعة من أيام الأسبوع وعليه سيكون اختيار يومين من 7 أيام

$$C_r^n = C_2^7 = \frac{7!}{2!\times(7-2)!} = \frac{7!}{2!\times 5!}$$

$$= \frac{7\times 6\times 5!}{2\times 1\times 5!} = \frac{42}{2} = 21 \text{ طريقة}$$

وبافتراض تم استبعاد يومي الخميس والجمعة من أيام الأسبوع فإن عدد الطرق : ـ

$$C_{r-2}^{n-2} = C_{2-2}^{7-2} = C_0^5 = 1 \text{ طريقة واحدة}$$

∴ عدد الطرق بحيث لا يمكن الجمع = إجمالي الطرق ـ الطرق المستبعدة

$21 - 1 = 20$ طريقة

تقويم ذاتي

ـ ما الفرق بين التوافيق والتباديل ؟

تدريب

يوجد في أحد المصانع 8 عمال و 4 عاملات نريد أختيار لجنة مؤلفة من 5 أفراد بكم طريقة يمكن اختيار اللجنة ؟

1) بدون شروط 2) على أن يكون فيها 3 عمال وعاملتين .

الحل : ـ

$$1)\ C_5^{12} = \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots = 792$$

$$2)\ C_3^8 \times C_2^4 = \cdots\ \cdots \times \frac{4!}{2!\times 2!} = 336$$

الخلاصة :ـ

بعد دراستك للمحاضرة عرفت عزيزي الدارس أن التوافيق ما هـــي إلا عبـــارة تباديل دون ترتيب كما عرفت كيفية الاستفادة من قوانين التوافيق في حل كثير مـــن المشاكل الواقعية الخاصة بتحديد طرق الاختيار .

تمارين

1) احسب ما يلي

$$C_{10}^{10} \;,\quad C_{16}^{20} \;,\quad C_{0}^{100}$$

2) في امتحان الرياضيات كان على كل طالب أن يجيب على 5 أسئلة من 8 أسئلة .

أ) كم عدد فرض الاختيار أمام الطالب .

ب) كم عدد فرض الاختيار إذا كان السؤال الأول والخامس إجباريين .

3) ما هو عدد طرق تكوين لجنة من 5 أشخاص من مجموعة مكونه من 11 شخص .

المراجع :-

ـ أساسيات الرياضيات البحته د. أحمد فتحي مصطفى د. يوسف صبري عوض (جامعة الزقازيق) .

ـ الرياضيات في الاقتصاد والتجارة والعلوم الإدارية د. أحمد الأشقر ، عمان ٢٠٠١م

المصطلحات :-

التوافيق Combinations

الوحدة الثالثة

نظرية ذات الحدين

تمهيد

مرحباً بك عزيزي الدارس إلى هذه الوحدة من مقررنا الرياضيات للعلوم الإدارية حيث خصصت هذه الوحدة لنظرية ذات الحدين وحوت هذه الوحدة على محاضـــرة واحدة لسهولة الموضوع ومتعته ولكن قسمنا المحاضـــرة إلى قـــسمين ، فأخـــذنا أولاً مفكوك ذي الحدين بأس صحيح موجب أما الجزء الثاني فقد خـــصص لمفكـــوك ذي الحدين باسم صحيح سالب أو كسر .

أهداف الوحدة :ـ

بعد دراستك لهذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على :ـ

١ ـــ حل جميع المسائل المتعلقة بمفكوك ذي الحدين بأس صحيح موجب

٢ ـــ حل جميع المسائل المتعلقة بمفكوك ذي الحدين بأس صحيح سالب أو كسر .

المحاضرة الخامسة

نظرية ذات الحدين

تمهيد

نرحب بك مجدداً أخي العزيز إلى المحاضرة الخامسة التي حوت جميع الوحدة الثالثة الموسومة بنظرية ذات الحدين حيث تحتوي على مفكوك ذي الحدين بأس صحيح موجب وكذلك بأس صحيح سالب أو كسر مع بعض التطبيقات .

فقد قسمت المحاضرة إلى قسمين اولاهما عن مفكوك ذي الحدين بأس صحيح موجب واستخدام التوافيق في إيجاده حيث فيه الكثير من المسائل المشوقة لإيجاد أي حد من حدودها وكذلك بعض التطبيقات العددية . أما قسمها الثاني فقد خصص لمفكوك ذي الحدين بأس صحيح سالب أو كسر وفيه أمثلة ومسائل وتطبيقات شيقة لكيفية حساب الجذور المختلفة كما أن هناك تدريبات وتمارين نرجو أن تثير شغفك وترسخ المعلومة في ذهنك .

أهداف المحاضرة : -

عزيز الدارس بعد دراستك لهذه المحاضرة ينبغي أن تكون قادراً على : -

١ ـــ معرفة المقدار ذو الحدين .

٢ ـــ فهم نظرية ذات الحدين واستخدام خواص مفكوك ذات الحدين لحل المسائل

٣ ـــ حل المسائل الرياضية باستخدام مثلث باسكال .

٤ ـــ حل المسائل المتعلقة بذي الحدين والمرتبطة بالتوافيق .

٥ ـــ حل المسائل الرياضية المتعلقة بمفكوك ذي الحدين بأس سالب أو كسر .

منهج مستوى أول علوم إدارية

الفصل الأول كاملا

الفصل الثاني

اقتصاد كلي

ثقافة

ع 2

المحتوى العلمي :ـ

سنتناول عزيزي الدارس في هذه المحاضرة نظرية ذات الحدين حيث سـنأخذ أولاً مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب ثم بأس صحيح سالب أو كسر حسب الآتي :ـ

- نظرية ذات الحدين (بأس صحيح موجب) .
- خواص مفكوك ذات الحدين .
- مثلث باسكال .
- الحد العام في مفكوك ذات الحدين .
- مفكوك ذات الحدين بأس صحيح سالب أو كسر .
- تقويم ذاتي .
- تدريب .

قراءات مساعدة :ـ

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية :ـ

WWW.hassona1.Jeeran.com
WWW.ou.cu.edu.eg

أولاً : مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب :ـ

كل مقدار جبري مكون من مجموع حدين أو الفرق بينهما يعرف باسم مقدار ذو حدين مثل $(x+y)$ ، $(x-a)$ ، $(2x-15)$.

ومن المعلوم أن $(x+y)(a+b) = ax+ay+bx+by$

ويلاحظ أن حاصل الضرب تكون من $4 = 2 \times 2$ حدود كل حد فيها يتكون من حاصل ضرب عاملين كل عامل من هذين العاملين هو أحد مفردات القوسين المضروبين كذلك حاصل الضرب :ـ

$(a+b)(c+d)(x+y) = cax+acy+adx+ady+bcx+bcy+bdx+bdy$

ويلاحظ أنه يتكون من حدود $8 = 2 \times 2 \times 2$ كل حد هو حاصل ضرب ثلاثة عوامل كل عامل منها ينتمي إلى أحد الأقواس الثلاثة المضروبة .

وعموماً فإنه إذا كان لدينا عدد (n) من الأقواس المختلفة وكل قوس منها يتكون من حدين ، وجميع مفردات الأقواس مختلفة فإن حاصل ضرب الأقواس = 2^n من الحدود وكل حد منها يتكون من حاصل ضرب (n) من العوامل ، وكل عامل منها مأخوذ من أحد الأقواس بحيث لا نجد عاملين مأخوذين من قوس واحد في أي حد من حدود حاصل الضرب

أما إذا كانت الأقواس متشابهة أي : $(a+b)(a+b) = aa+ab+ba+bb$

أي أن $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

وكذلك $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ أي أننا قمنا بضرب $(a+b)$ في نفسه ثلاث مرات .

أما إذا أردنا إيجاد قيمة $(a+b)^n$ فإننا نقوم بضرب $(a+b)$ في نفسه n من المرات . (n) هو عدد صحيح موجب . هذه القيمة تدعى بمفكوك ذو الحدين ولإيجاد هذا المفكوك هناك نظرية تدعى بنظرية ذات الحدين .

نظرية ذات الحدين :ـ

إذا كان n عدد صحيح موجب فإن :

$$(a+b)^n = C_0^n a^n b^0 + C_1^n a^{n-1} b + C_2^n a^{a-2} b^2 + \cdots + C_r^n a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n a^0 b^n$$

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r}$$

خواص مفكوك ذات الحدين $(a + b)^n$: ـ

١) عدد حدود المفكوك يساوي $(n + 1)$.

٢) تظهر قيمة a في الحد الأول من المفكوك بقوة n ثم تبدأ في التناقص بمقدار واحد من حد إلى الحد الذي يليه إلى أن تصل قيمتها الصفر في الحد الأخير .

٣) قوة الحد الثاني (b) تبدأ بالقوة (صفر) في الحد الأول وتأخذ في التزايد بمقدار واحد من حد إلى الحد الذي يليه إلى أن تصل قيمتها في الحد الأخير في المفكوك إلى n

٤) مجموع قوتي b ، a في أي حد من حدود المفكوك تساوي n .

٥) معاملات أي حدين متساويين في البعد عن طرفي المفكوك تكون متساوية وهذا يحقق الخاصية للتوافيق $C_r^n = C_{n-r}^n$ (أي أن معامل الحد الأول يساوي معامل الحد الأخير ومعامل الحد الثاني يساوي معامل الحد قبل الأخير ... وهكذا ....

مثال (1) : أوجد مفكوك المقدار $(x + y)^4$

الحل : ـ

$$\because (a+b)^n = \sum_{r=0}^{n} C_r^n a^{n-r} b^r$$

$$b = y \qquad a = x \qquad n = 4$$

$$(x+y)^4 = \sum_{r=0}^{4} C_r^4 x^{4-r} y^r$$

$$\therefore (x+y)^4 = C_0^4 x^{4-0} y^0 + C_1^4 x^{4-1} y^1 + C_2^4 x^{4-2} y^2 + C_3^4 x^{4-3} y^3 + C_4^4 x^0 y^4$$

$$= x^4 + \frac{4!}{1!(4-1)!} x^3 y + \frac{4!}{2!(4-2)!} x^2 y^2 + \frac{4!}{3!(4-3)!} x y^3 + y^4$$

$$= x^4 + \frac{3!\times 4}{3!\times 1} x^3 y + \frac{2!\times 4\times 3}{2!\times 2\times 1} x^2 y^2 + \frac{3!\times 4}{3!\times 1} x y^3 + y^4$$

$$= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4$$

(لاحظ هنا $C_0^4 = C_4^4 = 1 \qquad y^0 = 1 \qquad C_r^n = \frac{n!}{r!(n-r)!}$)

مثال (2) : أوجد مفكوك المقدار $(a-2b)^3$

الحل : ـــ

$b = -2b \qquad n = 3$

$$(a-2b)^3 = \sum_{r=0}^{3} C_r^3 a^{3-r}(-2b)^r$$

$$\therefore (a-2b)^3 = C_0^3 a^{3-0}(-2b)^0 + C_1^3 a^{3-1}(-2b)^1$$

$$+ C_2^3 a^{3-2}(-2b)^2 + C_3^3 a^{3-3}(-2b)^3$$

$$= a^3 + \frac{3!}{1!(3-1)!} a^2(-2b) + \frac{3!}{2!(3-2)!} a(-2b)^2 + (-2b)^3$$

$$= a^3 + \frac{2!\times 3}{2!\times 1} a^2(-2b) + \frac{2!\times 3}{2!\times 1} a(4b^2) + (-8b^3)$$

$$= a^3 - 6a^2b + 12ab^2 - 8b^3$$

مثال (3) أوجد مفكوك المقدار $(x^2+3y^2)^4$

الحل : ـــ $\qquad n = 4 \qquad a = x^2 \qquad b = 3y^2$

$$\left(x^2+3y^2\right)^4 = \sum_{r=0}^{4} C_r^4 \left(x^2\right)^{4-r}\left(3y^2\right)^r$$

$$= C_0^4\left(x^2\right)^{4-0}\left(3y^2\right)^0 + C_1^4\left(x^2\right)^{4-1}\left(3y^2\right)^1 + C_2^4\left(x^2\right)^{4-2}\left(3y^2\right)^2$$

$$+ C_3^4\left(x^2\right)^{4-3}\left(3y^2\right)^3 + C_4^4\left(x^2\right)^0\left(3y^2\right)^4$$

$$= \left(x^2\right)^4 + \frac{4!}{1!\times 3!}\left(x^2\right)^3\left(3y^2\right) + \frac{4!}{2!\times 2!}\left(x^2\right)^2\left(3y^2\right)^2 + \frac{4!}{3!\times 1!}x^2\left(3y^2\right)^3 + \left(3y^2\right)^4$$

$$= x^8 + 4x^6\left(3y^2\right) + 6x^4\left(9y^4\right) + 4x^2\left(27y^6\right) + 81y^8$$

$$= x^8 + 12x^6y^2 + 54x^4y^4 + 108x^2y^6 + 81y^8$$

مثلث باسكال : ـ

يعرض مثلث باسكال مفكوك ذات الحدين للقوى المتتالية ابتداءً من $n = 0$ وبذلك يختصر العمليات الحسابية الخاصة بحساب عدد الطرق الاختيار C_r^n ويمكن تمثيله كالتالي : ـ

n	المعاملات / المقادير	C_0^n	C_1^n	C_2^n	C_3^n	C_4^n	C_5^n	C_6^n
1	$(a+b)^1$	1	1					
2	$(a+b)^2$	1	2	1				
3	$(a+b)^3$	1	3	3	1			
4	$(a+b)^4$	1	4	6	4	1		
5	$(a+b)^5$	1	5	10	10	5	1	
6	$(a+b)^6$	1	6	15	20	15	6	1

ويتميز مثلث باسكال بالآتي : ـ

1. **أن أول وآخر رقم في كل صف هو لواحد .**
2. **أن أي رقم آخر يمكن الحصول عليه من مجموع الرقمين أعلاه ابتداءً من اليسار .**
3. **يمكن استكمال الجدول بسهولة للقوى الأعلى .**

ملاحظة : ـ في الأمثلة القادمة سنحسب C_r^n باستخدام مثلث باسكال بدلاً من إيجاده بقانون التوافيق .

مثال (4) : باستخدام مثلث باسكال أوجد مفكوك المقدار $(a-2x)^5$

الحل : ـ

من مثلث باسكال فإن معاملات $(a-2x)^5$ هي 1 ، 5 ، 10 ، 10 ، 5 ، 1

ملاحظة : معامل الحد الثاني $C_1^n = n$ أي أنه يساوي الأس دائما ومعامل الحد الأول $1 = C_0^n$

$n = 5$ ، $a = a$ ، $b = (-2x)$

$$(a-2x)^5 = a^5 + 5a^4(-2x) + 10a^3(-2x)^2 + 10a^2(-2x)^3 + 5a(-2x)^4 + (-2x)^5$$
$$= a^5 - 10a^4x + 40a^3x^2 - 80a^2x^3 + 80ax^4 - 32x^5$$

لاحظ هنا أن الحدين بينهما عملية طرح ليس جمع وبالتالي كان المفكوك اشارته بدأت موجبة من ثم تناوبت بين الموجب والسالب .

الحد العام في مفكوك ذات الحدين :ـ

يتضح مما سبق أن حدود مفكوك ذات الحدين ترتبط بترتيبها في مجموعة الحدود فنجد : ـ

الحد الأول $= U_1 = C_0^n a^n b^0 = a^n$

الحد الثاني $= U_2 = C_1^n a^{n-1} b^1$

الحد الثالث $= U_3 = C_2^n a^{n-2} b^2$

$\vdots$

الحد ذو الرتبة r $= U_r = C_{r-1}^n a^{n-r+1} b^{r-1}$

الحد العام = $\boxed{U_{r+1} = C_r^n a^{n-r} b^r \qquad n \geq r+1}$

ويسمى هذا الحد العام وذلك لإمكان الحصول منه على جميع حدود المفكوك فبوضع $r = 0$ نحصل على الحد الأول ، وبوضع $r = 1$ نحصل على الحد الثاني وبوضع $r = n$ نحصل على الحد الأخير .

مثال (5) : أوجد الحد الرابع في مفكوك $(2a+3b)^5$

الحل : ـ $U_4 = U_{r+1} \Rightarrow r+1 = 4 \Rightarrow r = 3$

$$\therefore U_4 = C_3^5 (2a)^{5-3} (3b)^3 = \frac{5!}{3! \times 2!} (2a)^2 (3b)^3$$

$$= \frac{3! \times 5 \times 4}{3! \times 2 \times 1} (4a^2)(27b^3) = 10 \times 4a^2 \times 27b^3$$

$$= 1080\, a^2 b^3$$

مثال (6) : أوجد الحد السابع من مفكوك $(2x-y)^9$

الحل : ـ

$$U_{r+1}=C_r^n a^{n-r} b^r$$ = الحد العام

n = 9 ، b = -y ، a = 2x

$$U_7=U_{r+1}\Rightarrow r+1=7\Rightarrow r=6$$

$$\therefore U_7 = C_6^9 (2x)^{9-6}(-y)^6 = \frac{9!}{6!(9-6)!}(2x)^3(-y)^6$$

$$= \frac{6!\times 7\times 8\times 9}{6!\times 1\times 2\times 3}(8x^3)(y^6) = 84\times 8x^3\times y^6$$

$$= 672\ x^3 y^6$$

مثال (7) : أوجد الحد الثامن في مفكوك $\left(2x^3+\frac{1}{x}\right)^{10}$

الحل : ـ

يمكننا الحل مباشرة

$$U8 = U_{7+1} = C_7^{10}(2x^3)^3\left(\frac{1}{x}\right)^7 = \frac{10!}{7!\times 3!}(8x^9)\left(\frac{1}{x^7}\right)$$

$$= \frac{7!\times 8\times 9\times 10}{7!\times 1\times 2\times 3}(8x^9)(x^{-7}) = 120\times 8x^9\times x^{-7}$$

$$= 960\ x^2$$

مثال (8) : أوجد معامل x^{10} في مفكوك $(2x-3)^{14}$

الحل : ـ

رتبة الحد الذي يحتوي على x^{10} غير معلومة

. . نفرض أن الحد الذي يحتوي x^{10} هو U_{r+1}

$$\therefore U_{r+1} = C_r^{14}(2x)^{14-r}(-3)^r = C_r^{14}\,x^{14-r}\,2^{14-r}(-3)^r$$

الحد يحوي x^{10} فإن $x^{14-r}=x^{10}$

$$\therefore 14-r=10\Rightarrow r=4$$

إذن هو الحد الخامس ونستخدم الحد العام لإيجاده : ــ

$$\therefore U_5 = C_4^{14}(2x)^{10}(-3)^4 = \frac{14!}{4!\times 10!}\left(2^{10}x^{10}\right)\times 81$$

$$= \frac{10!\times 11\times 12\times 13\times 14}{10!\times 2\times 3\times 4}\times 81\times 2^{10}\times x^{10} = 1001\times 81\times 2^{10}\times x^{10}$$

$$= 81081\times 2^{10}x^{10}$$

إذن معامل x^{10} هو 81081×2^{10}

مثال (9) : أوجد الحد الخالي من x في مفكوك $(x+2y)^5$

الحل : ــ

نوجد الحد العام $U_{r+1} = C_r^5 (x)^{5-r}(2y)^r =$

الحد الخالي من x يكون فيه x^0

$$\therefore x^{5-r} = x^0 \Rightarrow 5-r=0 \Rightarrow r=5$$

أين أنه الحد السادس

$$\therefore U_6 = C_5^5 x^{5-5}(2y)^5 = 1\times 1\times 32y^5 = 32y^5$$

إذن الحد الخالي من X هو $32y^5$

مثال (10) : باستخدام نظرية ذات الحدين أوجد قيمة $(91)^4$

الحل : ــ

يمكن كتابة $(91)^4 = (1+90)^4$

المعاملات حسب مثلث باسكال هي 1 ، 4 ، 6 ، 4 ، 1

$$(1+90)^4 = 1\times 1^4\times(90)^0 + 4\times 1^3(90)^1 + 6\times 1^2(90)^2$$
$$+ 4\times 1^1\times(90)^3 + 1\times 1^0\times(90)^4$$
$$= 1+360+6\times 8100+4\times 729000+65610000$$
$$= 68574961$$

تقويم ذاتي

١ـ عرف المقدار ذي الحدين ؟

٢ـ ما الفائدة من مثلث باسكال ؟

تدريب

اوجد الحد الخالي من x في مفكوك $\left(x - \frac{2}{x^2} \right)^{12}$

الحل :

$b = -\frac{2}{x^2} = -2x^{-2}$ $\quad a = x \quad n = 12$

نفرض أن الحد الخالي من x هو U_{r+1}

$$\because U_{r+1} = C_r^n a^{n-r} b^r$$

$$\therefore U_{r+1} = C_r^{12} x^{12-r} (-2x^{-2})^r$$

$$C_r^{12} (-2)^r x^{12-r} x^{-2r}$$

$$x^{12-r} x^{-2r} = x^0$$

نضع

الجواب الحد الخالي من x هو الحد الخامس وقيمته 7920

ثانياً : مفكوك ذات الحدين بأس سالب أو كسر : ـ

فيما سبق درسنا مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب أي (n) صحيح موجب . أما إذا كان (n) عدد صحيح سالب أو كسر فإن المفكوك يمثل متسلسلة لا نهائية من الحـــدود . وتعطى بالصيغة الآتية : ـ

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots$$

حيث n عدد صحيح سالب أو كسر ، $|x| < 1$

نلاحظ هنا كتبنا بدلا عن $a = 1$ وعن $b = x$ في مفكوك ذات الحدين بأس صحيح موجب .

مثال (11) : أوجد المقادير التالية باستخدام نظرية ذات الحدين

$a)(1.01)^{-3}$ $\qquad$ $b)\sqrt[3]{0.97}$

الحل : ـ

نستخدم نظرية ذات الحدين بأس صحيح سالب أو كسر أي

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!} + \cdots\cdots\cdots$$

$\therefore a)(1.01)^{-3} = (1+0.01)^{-3}$ $\qquad n = -3 \qquad x = 0.01$

$$(1.01)^{-3} = (1+0.01)^{-3} = 1 + (-3)(0.01$$
$$+\frac{(-3)(-3-1)(0.01)^2}{2!} + \frac{(-3)(-3-1)(-3-2)(0.01)^3}{3!} + \cdots$$
$$= 1 - 0.03 + \frac{(-3)(-4)(0.0001)}{2\times 1} + \frac{(-3)(-4)(-5)(0.000001)}{3\times 2\times 1} + \cdots\cdots$$
$$= 1 - 0.03 + 0.0006 - 0.00001 + \cdots\cdots$$
$$= 0.97059$$

$b)\sqrt[3]{0.97} = (1-0.03)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad n = \frac{1}{3}$ $\qquad$ $x = -0.03(1-0.03 = 0.97)$ لاحظ كتبنا

$$\therefore \sqrt[3]{0,97} = (1-0.03)^{\frac{1}{3}} = 1+\frac{1}{3}(-0.03)+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(-0.03)^2}{2!}+\frac{\frac{1}{3}(\frac{1}{3}-1)(\frac{1}{3}-2)(-0.03)^3}{3!}+\cdots\cdots$$

$$=1-0.01+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(0.0009)}{2\times1}+\frac{\frac{1}{3}(-\frac{2}{3})(-\frac{5}{3})(-0.000027)}{3\times2\times1}+\cdots\cdots$$

$$=1-0.01-0.0001-0.0000449+\cdots\cdots$$

$$=0.9898551$$

ولأن مفكوك ذات الحدين بأس سالب أو كسر هو متسلسلة لا نهائية فقد اكتفينا في هـذا المثال بأخذ أربعة حدود فقط .

تدريب

- أحسب قيمة $\sqrt[4]{0.99}$ باستخدام مفكوك ذي الحدين .

الحل : ــ

$$\sqrt[4]{0.99} = (1-0.01)^{\frac{1}{4}} =$$

$n = \frac{1}{4}$ $\quad x = -0.01$ وبالتطبيق للقاعدة : ــ

$$(1+x)^n = 1+nx+\frac{n(n-1)x^2}{2!}+\frac{n(n-1)(n-2)x^3}{3!}+\cdots$$

أكمل $\quad (1-0.01)^{\frac{1}{4}} = 1+\frac{1}{4}(-0.01)+\cdots\cdots$

الجواب $\quad \sqrt[4]{0.99} = 0.99749065$

الخلاصة :-

تعرفت أخي الدارس في هذه المحاضرة أن كل مقدار جبري مكون من مجموع حدين أو الفرق بينهما يعرف باسم مقدار ذو حدين وعرفت خواص مفكوك ذات الحدين واستخدام التوافيق لحل وفك كثير من المقادير الجبرية .

كما فهمت كيفية التعامل مع مثلث باسكال ومساعدته لك في اختصار العمليات الحسابية الخاصة بحساب عدد الطرق . بالإضافة إلى حسابك مفكوك متسلسلة لا نهائية من الحدود والتي تعرف مفكوك ذات الحدين بأس صحيح سالب أو كسر .

تمارين

1) أوجد مفكوك المقادير التالية : ــ

$a)(2x-5x)^3$ $b)(x+1)^4$ $c)(x^2-2y^2)^4$

$d)(2ab-x)^3$ $e)(a+\frac{1}{2}a^2)^5$

2) أوجد الحد الرابع في مفكوك المقادير التالية : ــ

$a)(x+y)^3$ $b)(\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b^2)^5$ $c)(b^3-2a)^3$

$d)(2x+3y)^4$

3) أوجد الحد الذي يحتوي على X^6 في المقادير التالية : ــ

$a)(\frac{1}{2}x+ax^2)^4$ $b)(2x+5y5)^7$

$c)(3x^2+3xy)^4$ $d)(4x^3+x)^5$

4) أوجد الحد الخالي من X في المقادير التالية : ــ

$a)(x^2-\frac{1}{x})^9$ $b)(\frac{2}{3}x-\frac{3}{2x^2})^6$

5) أوجد معامل X^9 في مفكوك $(x^2-3x^{-3})^{12}$

6) أوجد باستخدام مفكوك ذي الحدين قيمة الآتي : ــ

$a)(1.3)^5$ $b)(0.98)^4$

7) باستخدام مفكوك ذي الحديد (بأس سالب أو كسر) أوجد قيمة الآتي : ــ

$a)(1.1)^{-6}$ $b)\sqrt{0.999}$

$c)(0.96)^{-5}$ $d)\sqrt[4]{1.01}$

$e)(1.02)^{-4}$ $f)\sqrt[3]{1.03}$

المراجع :-

- الرياضيات في الاقتصاد والتجارة والعلوم الإدارية د . أحمد الأشقر .
- الرياضيات البحته د. جاسم محمد علي

المصطلحات :-

- ذات الحدين Blonmlal Theorem

الوحدة الرابعة

المتواليات والمتسلسلات

تمهيد

أهلاً بك عزيزي الدارس إلى الوحدة الرابعة من مقرر رياضيات العلوم الإدارية حيث قسمنا هذه الوحدة إلى محاضرتين الأولى احتوت على المتسلسلات والمتواليات الحسابية والمحاضرة الثانية تطرقت إلى المتواليات الهندسية . ولا تنسى أخي الكريم التدريبات وأسئلة التقويم الذاتي وكذا التمارين في نهاية كل محاضرة فهي خير عون لك لفهم هذه المحاضرات .

أهداف الوحدة :-

بمعرفتك لهذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على :-

١ ــ فهم المتسلسلات بجميع أشكالها وأنواعها وحل مسائلها .

٢ ــ التعامل بمهارة مع المتواليات الحسابية وحل جميع مسائلها .

٣ ــ التعامل بمهارة مع المتواليات الهندسية وحل جميع مسائلها .

٤ ــ التفريق بين المتواليات الحسابية والهندسية .

المحاضرة السادسة

المتسلسلات و المتواليات الحسابية

تمهيد

مرحباً بك أخي الدارس إلى المحاضرة السادسة والمعنونة باسم المتسلسلات والمتواليات الحسابية وقسمت هذه المحاضرة إلى قسمين أولاً للمتسلسلات وهي مدخل لابد منه للمتواليات والقسم الثاني ارتأينا أن يكون للمتواليات الحسابية التي أبحرنا فيها كثيراً (مفهومها وحدها العام ....) وكذا ربطها بالكثير من المسائل الاقتصادية والمحاسبية وخصوصاً الرياضة المالية كما عملنا تدريبات وأسئلة تقويم ذاتي بالإضافة إلى التمارين .

أهداف المحاضرة : ـ

عند دراستك لهذه المحاضرة يفترض أن تكون قادراً على : ـ

١ ــ التمييز بين أنواع المتسلسلات .

٢ ــ حل المسائل المتعلقة بالمتسلسلات .

٣ ــ حل المسائل المتعلقة بالمتواليات الحسابية وخصوصاً المتعلقة بالرياضة المالية .

٤ ــ فهم المتواليات الحسابية وكيفية التعامل معها .

المحتوى العلمي :ـ

سنتناول في هذه المحاضرة أولاً المتسلسلات بأنواعها وأشكالها وكيفية جمعها وسـنأخذ ثانياً المتواليات الحسابية وكيفية جمعها وذلك حسب التفصيل الآتي :ـ

- التسلسلات .
- الأشكال العامة للمتسلسلات .
- جمع المتسلسلات .
- تقويم ذاتي .
- المتواليات .
- المتوالية الحسابية .
- الحد العام للمتواليات .
- الحد الأخير للمتواليات .
- إيجاد مجموع المتواليات الحسابية .
- تقويم ذاتي .
- تدريب .

قراءات مساعدة :ـ

لمزيد من الاطلاع عليك بزيارة المواقع التالية :ـ

WWW.hassona1.Jeeran.com
WWW.ou.eu.edu.eg

أولاً : المتسلسلات Series

هي مجموعة من الأعداد الحقيقية (التي تسمى بحدود المتسلسلة) موضوعة بصورة مرتبة (تصاعدية أو تنازلية أو ترددية الإشارة) بحيث يربط حدودها المتتالية علاقة محددة وليس للمتسلسلات شكل واحد محدد فقد تكون أعداد طبيعية أو أعداد صحيحة موجبة أو سالبة أو قد تكون أعداد كسرية .... كما قد تكون محددة بعدد من الحدود أو قد تكون غير محددة الحدود أي نهائية .

الأشكال العامة للمتسلسلات : .

1) متسلسلة مجموعة الأعداد الطبيعية : ـ

وتأخذ الشكل $\{1,2,3,4,\cdots,\infty\}$ التالي فنجد أن هذه المتسلسلة تبدأ بالرقم 1 الذي يمثل أول حدودها وتستمر بالزيادة بمقدار واحد لكل حد حتى نصل إلى مالا نهاية (∞) .

2) متسلسلة الأعداد الصحيحة : ـ

وتأخذ الشكل $\{-\infty\ \cdots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots,+\infty\}$

3) متسلسلة الأعداد الكسرية : ـ

وتأخذ الشكل $\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{1}{5},\ldots\ldots\right\}$

4) متسلسلة مجموعة الأعداد المركبة : ـ

وهذه المتسلسلة عند النظرة الأولى لها تظهر وكأنه لا يربطها أي نظام ولكن عند التحليل إلى عواملها تظهر في صورة متسلسلة مثل { ..... ، 120 ، 24 ، 6 ، 2 ، 1 } ويمكن ترتيبها بالتحليل كما يلي : ـ

$$\{1,1\times2,1\times2\times3,1\times2\times3\times4,1\times2\times3\times4\times5,\cdots\cdots\}$$

جمع المتسلسلات

أولاً : مجموع المتسلسلة المحدودة للأعداد الطبيعية :

لإيجاد مجموع المتسلسلة للأعداد الطبيعية علينا باتباع القانون التالي : ـ

$$S_n=\frac{n(n+1)}{2}$$

حيث أن (n) هو عدد الحدود

مثال (1) : أوجد مجموع الأعداد الطبيعية من ١ إلى ١٠٠

الحل : ــ

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$S_{100} = \frac{100\,(100+1)}{2} = \frac{100 \times 101}{2} = \frac{10100}{2} = 5050$$

مثال (2) : أوجد مجموع المتسلسلة التالية : ــ

$$\{8,9,10,11,12,\cdots\cdots 20\}$$

الحل : ــ

نلاحظ أن المتسلسلة لا تبدأ بالعدد الصحيح الواحد والمتسلسلة للأعداد الطبيعية تبدأ بالواحد الصحيح ولكن يمكن إن نضيف بقية المتسلسلة من 1 ــ 7 ثم فيما بعد تخصمها بعد أن نوجد فيه المتسلسلة المراد إيجادها وذلك كالآتي : ــ

بالإضافة 1 ــ 7 $\{1,2,3,4,\cdots\cdots,19,20\}$

$$S_{20} = \frac{20\,(21)}{2} = 210$$

ثم نوجد المتسلسلة من 1 ــ 7 كما يلي

$$S_7 = \frac{7(8)}{2} = 28$$

اذن فإن المتسلسلة المطلوبة تكون

$$S = S_{20} - S_7$$
$$= 210 - 28 = 182$$

ثانياً : مجموع المتسلسلة المحدودة لمربعات الأعداد : ــ

ويكون شكل المتسلسلة كالآتي : $\{1^2, 2^2, 3^2, \cdots (n-1)^2, n^2\}$

ومجموع هذه المتسلسلة يكون : ــ

$$\boxed{S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

مثال (1) : أوجد مجموع مربعات الأعداد الطبيعية من 1 إلى 20

الحل : ــ

تكون المتسلسلة بالشكل كالتالي : $\{1^2, 2^2, 3^2, \ldots\ n^2\}$

$$S_{20} = \frac{20\,(20+1)(2\times 20+1)}{6} = \frac{20\,(21)(41)}{6}$$

$$= \frac{17220}{6} = 2870$$

ثالثاً : مجموع المتسلسلة المحدودة لمكعبات الأعداد الطبيعية :

ويكون شكل المتسلسلة كالآتي : $\{1^3, 2^3, 3^3, \ldots (n-1)^3, n^3\}$

ويكون مجموع المتسلسلة كما يلي : ــ

$$\boxed{S_n = \frac{n^2\,(n+1)^2}{4}}$$

مثال : أوجد مجموع مكعبات الأعداد الطبيعية من 1 إلى 30

الحل : ــ

تكون المتسلسلة كالآتي : ــ $\{1^3, 2^3, 3^3, \ldots (30)^3\}$

$$S_{30} = \frac{(3)^2\,(30+1)^2}{4} = \frac{900\,(31)^2}{4}$$

$$= \frac{900 \times 961}{4} = 216225$$

تقويم ذاتي

ـ اكتب أربعة متسلسلات بأشكال مختلفة .

ثانياً : المتواليات الحسابية : ـ

المتواليات Progrossions

وهي أحد أنواع المتسلسلات التي تتصف بخاصية ثابتة سواء في حالة زيادتها أو في حالة نقصانها ، وهذا التغيير قد يكون على شكل مقدار ثابت ولذلك يسمى تغير عددي وفي هذه الحالة تسمى المتسلسلة بالمتوالية العددية أو الحسابية وقد يكون التغير على شكل نسبة ثابتة وفي هذه تسمى المتسلسلة بالمتوالية الهندسية وأحياناً توجد متسلسلة تشمل بعض الصفات من النوعين وتسمى بالمتوالية التوافقية .

وللمتواليات أهمية في كثير من الأمور المحاسبية والاقتصادية حيث تساعد على احتساب الفوائد البسيطة والمركبة . وكذا معرفة حجم الانتاج أو الاستهلاك الذي يخضع للتغيير بوحدات ثابتة أو معدلات ثابتة .

وأطرف ما قيل حول المتواليات نظرية مالتوس إذ يقول أن السكان يتزايدون وفق متوالية هندسية والغذاء يزيد وفق متوالية حسابية وبالتالي فإن الغذاء بعد فترة زمنية قد لا يكفي السكان . بعدها وصل إلى حله الشيطاني لإعادة التوازن بين العنصرين السكان والغذاء ألا وهو الحروب والإبادة . ولكن الذي يهمنا من ذلك أن نفهم أن المتوالية الهندسية تزيد وتتضاعف بصورة أكثر من الحسابية .

المتوالية الحسابية

هي متسلسلة من الأعداد أو القيم الجبرية مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً بحيث أن كل عدد يزيد أو ينقص عن العدد السابق له بمقدار ثابت .

فمثلا الأعداد 6 ، 5 ، 4 ، 3 ، 2 ، 1 تشكل متوالية بحيث يزيد كل عدد عن سابقه بمقدار (1) وكذلك 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، 6 متوالية بحيث ينقص كل عدد عن سابقه بمقدار (1)

وكذلك (8 ، 6 ، 4 ، 2) مقدار الزيادة (2)

أيضا (2m ، 7m ، 12m ، 17m) مقدار الزيادة (5m)

أيضا (13 ، 16 ، 19 ، 22) مقدار الزيادة (3-)

فهذا كلها متواليات حسابية لأن كل منها تخضع لقاعدة واحدة في تغيرها وهو زيادة او نقصان في قيم المتوالية بمقدار ثابت . وهذا المقدار الثابت (زيادة أو نقصان) يسمى أساس المتوالية .

الحد العام للمتوالية

إذا رمزنا للحد الأول من المتوالية بالرمز (a) والأساس بالرمز (d) و (n) عدد الحدود فإن الحد العام للمتوالية يكون حسب القانون التالي : ــ

$$\boxed{r_n = a + (n-1)d}$$

حيث أن r_n الحد العام للمتوالية .

الحد الأخير للمتوالية

إذا رمزنا للحد الأخير بالرمز (L) فإن إيجاد الحد الأخير في المتوالية الحسابية يكون باستخدام القانون التالي : ــ

$$\boxed{L = a + (n-1)d}$$

مثال (1) أكتب الحد العام للمتوالية الحسابية التالية : ــ

4 ، 7 ، 10 ، 13 ، ......

الحل : ــ

$$d = 7 - 4 = 10 - 7 = 13 - 10 = 3$$
$$d = 3 \qquad a = 4$$
$$r_n = a + (n-1)d = 4 + (n-1)3$$
$$r_n = 4 + (3n - 3)$$
$$r_n = 4 + 3n - 3$$

مثال (2) إذا كان 15 هو قيمة أحد الحدود المتوالية (...... ، 40 ، 45 ، 50 ، 55) فما هو ترتيب هذا الحد ؟

الحل : ــ

$$\because\ d = 50 - 55 = -5$$
$$\because\ r_n = a + (n-1)d$$
$$15 = 55 + (n-1)(-5)$$
$$15 = 55 - 5n + 5$$
$$15 = 60 - 5n$$
$$15 - 60 = -5n$$
$$-45 = -5n \qquad /\div -5$$
$$n = 9$$

مثال (3) : متواليه حسابية تتكون من (15) حد ، حدها الأول (30) وحـدها الثـاني (27.5) أوجد الحد الأخير في المتوالية ؟

الحل : ــ $a = 30 \qquad d = 27.5 - 30 = -2.5$

$$L = a + (n-1)d$$
$$L = 30 + (15-1)(-2.5)$$
$$L = 30 + 14 \times -2.5$$
$$L = 30 - 35$$
$$L = -5$$

مثال (4) : ضع عشرة حدود عددية بين 100 ، 45

الحل : ــ

الحد الأول (a) = 45

الحد الأخير (L) = 100 وترتيبه 12

. . عدد الحدود = حد 12 = 2 + 10

$$L = a + (n-1)d$$
$$100 = 45 + (12-1)d \qquad /-45$$
$$55 = 11d$$
$$d = 5$$

الأساس = 5

. . المتوالية تكون

{ 45 ، 50 ، 55 ، 60 ، 65 ، 70 ، 75 ، 80 ، 85 ، 90 ، 95 ، 100 }

إيجاد مجموع المتواليات الحسابية

نظرية : مجموع متوالية حسابية حدها الأول (a) وحدها الأخير (k) وعدد حدودها (n) هو

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(a + L)}$$

حيث أن S_n ← مجموع المتوالية

وستخدم هذا القانون في حالة معلومية الحد الأخير مع معرفة الحد الأول وعـدد الحـدود ،
ومن هذه النظرية نستنتج النتيجة التالية :ـ

نتيجة : مجموع متوالية حسابية حدها الأول (a) وأساسها (d) وعدد حدودها (n) يكون هو

$$\boxed{S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)}$$

ويستخدم هذا القانون في حالة معلومية أساس المتوالية مع معرفة الحد الأول وعدد الحدود

مثال (5) : اوجد مجموع حدود المتوالية الحسابية { 43 ، .... ، 13 ، 8 ، 3 }

الحل :ـ

الحد الأخير $L = 43$

الأساس $d = 8 - 3 = 5$

$$\because \; L = a + (n-1)d$$

$$43 = 3 + (n-1)5$$

$$40 = 5n - 5$$

$$45 = 5n$$

$$n = \frac{45}{5} = 9$$

∴ عدد الحدود 9

$$S_n = \frac{n}{2}(a + L)$$

$$S_9 = \frac{9}{2}(3 + 43)$$

$$S_9 = \frac{9}{2} \times 46 = 46 = 207$$

مثال (6) : متوالية حسابية عدد حدودها 8 وحدها الأخير = 26 ومجموعها 124 ، أوجد الحد الأول والأساس ؟

الحل : ــ

$$\because S_n = \frac{n}{2}(a + L)$$

$124 = 4(a + 26) \qquad /\div 4$

$31 = a + 26 \qquad /- 26$

$a = 31 - 26 = 5$

. . الحد الأول (a) = 5

$\because L = a + (n - 1)d$

$26 = 5 + (8 - 1)d \qquad /- 5$

$21 = 7d \qquad /\div 7$

$$d = \frac{21}{7} = 3$$

مثال (7) إذا كان مجموع الحدود الثلاثة الاولى من متوالية حسابية يساوي (12) ومجموع حديها الخامس والسادس يساوي (22) ، أكتب حدود هذه المتوالية ثم أوجد مجموع الحدود العشرين الأولى .

الحل : ــ

$a + (a + d) + (a + 2d) = 12$

$\therefore 3a + 3d = 12 \qquad /\div 3$

$a + d = 4 \rightarrow (1)$

$(a + 4d) + (a + 5d) = 22$

$2a + 9d = 22 \rightarrow (2)$

بضرب النتيجة(1) × العدد (2)

$2a + 2d = 8 \rightarrow (3)$

بطرح (3) من (2)

$$\begin{array}{r} 2a + 9d = 22 \\ -\quad 2a + 2d = 8 \\ \hline 7d = 14 \end{array}$$

$d = 2$

$\because a + d = 4 \rightarrow (1)$

$\therefore a = 2$

. . حدود المتوالية 20 ...... ، 8 ، 6 ، 4 ، 2

$$\because S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)d)$$

$$S_{20} = \frac{20}{2}(4 \times 2 + (20 - 1)2) = 10(4 + 38)$$

$= 10 \times 42 = 420$

مثال (8) : منشأة تنتج 1000 وحدة من منتج معين شهر يناير وكان الانتاج يزداد بمقدار 50 وحدة شهرياً ، وجدت المنشأة أن هناك تلف في الإنتاج قدره 3% من الإنتاج الشهري ، فأوجد مجموع الإنتاج ومقدار التلف خلال السنة ؟

الحل : ـــ

حجم الإنتاج خلال السنة يكون متوالية حسابية حدها الأول 1000 وأساسها 50 وعدد حدودها (12) حد لأنه في السنة 12 شهر وهي بالشكل الآتي : ـــ

1000 ، 1050 ، 1100 ، ....

لإيجاد مجموع الإنتاج يعني مجموع المتوالية

$$\because S_n = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2 \times 1000 + (12-1)50)$$

$$= 6(2000 + 550) =$$

$$= 6 \times 2550 = 15300 \quad \text{وحدة}$$

مقدار التلف 3% من حجم الإنتاج فتكون متوالية بعد ضرب الحدود (الإنتاج) × 3% ليعطي حدود أخرى تكون تلف وتكون بالشكل التالي : ـــ

30 ، 31.5 ، 33 ، 34.5 ، ....

وهي متواليه حدها الأول (a) = 30 وأساسها (d) = 1.5 وعدد حدودها (n) = 12

∴ مجموع التلف يكون

$$S_{12} = \frac{12}{2}(2 \times 30 + (12-1)1.5)$$

$$= 6(60 + 11 \times 1.5) =$$

$$= 6(60 + 16.5) = 6 \times 76.5$$

$$= 459 \quad \text{وحدة تالفة}$$

مثال (9) : شخص يوزع مبلغ معين أول كل شهر في مصرف فإذا كان المصرف يحتسب فوائد بسيطة بمعدل 10% سنوياً وفي نهاية العام كانت جملة المبلغ المستحق له 1265 دولار فما هو مقدار المبلغ الشهري الذي يودعه هذا الشخص ؟

الحل : ــ

نفرض أن المبلغ الشهري المودع = a

الفوائد = $\frac{10}{100}$ سنوياً ، إذن شهرياً تكون $\frac{10}{100} \times \frac{1}{12} = \frac{1}{120}$

وبذلك تكون جملة الدفعة الشهرية كما يلي : ــ

جملة الدفعة الأولى $a + a(\frac{1}{120}) \times 12 = a + \frac{12}{120}a =$

لقد ضربنا × 12 لأن استثمار الدفعة الاولى من أول السنة إلى آخر السنة أي 12 شهر ثم الدفعة الثانية تكون (11) شهر لأن من الشهر الثاني إلى آخر السنة وهكذا

جملة الدفعة الثانية $a + a(\frac{1}{120}) \times 11 = a + \frac{11}{120}a =$

جملة الدفعة الثالثة $a + a(\frac{1}{120}) \times 10 = a + \frac{10}{120}a =$

وهكذا إلى الدفعة الأخيرة

جملة الدفعة الأخيرة (الثاني عشر) $a + a(\frac{1}{120}) \times 1 = a + \frac{1}{120}a =$

وبذلك تكون لدينا متوالية عددية حدودها = 12 حد ، وحدها الأول $\left(a + \frac{12}{120}a\right)$

وأساسها $-\frac{1}{120}a$

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$1265 = \frac{12}{2}\left(2\left(a + \frac{12}{120}a\right)\right) + \left((12-1)\left(-\frac{1}{120}a\right)\right)$$

$$1265 = 6\left(2a + \frac{24}{120}a\right) + 11\left(-\frac{1}{120}a\right)$$

$$1265 = 6\left(2a + \frac{24}{120}a - \frac{11}{120}a\right)$$

$$1265 = \left(2a + \frac{13}{120}a\right)$$

$$1265 = 6\left(\frac{240a - 13a}{120}\right)$$

$$1265 = \frac{253}{20}a \qquad \times 20$$

$$25300 = 253a$$

$$\therefore a = \frac{25300}{253} = 100$$

تقويم ذاتي

ـ عرف المتوالية الحسابية ؟

تدريب

أوجد مجموع حدود المتوالية الحسابية

$4 ، 7 ، 10 .... 52$

الحل : ـ

....

....

$S_{17} = 476$

عليك بإكمال الفراغ

الخلاصة :ـ

بعد فراغنا من هذه المحاضرة أخي الكريم يمكن أن نخلص إلى الآتي :ـ

١ ــ أن المتسلسلات هي مدخل للمتواليات وأن المتواليات ما هي إلا عبارة عن متسلسلات تتصف بخاصية ثابتة سواء في حالة زيادتها ونقصانها .

٢ ــ أن المتسلسلة من الأعداد أو القيم الجبرية المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً بحيث أن كل عدد يزيد أو ينقص عن العدد السابق له بمقدار ثابت هي متوالية حسابية .

٣ ــ أنه بإمكاننا أن نجمع حدود المتواليات الحسابية .

تمارين

المتسلسلات

أوجد مجموع متسلسلات الأعداد الطبيعية التالية : ـ

1) $1 ، 3 ، 5 ، .... ، 47 ، 49$

2) $6 ، 7 ، 8 ، 9 ، .... 20$

3) $1^2 ، 2^2 ، 3^2 ، ....$ إلى 20 حد

4) $2^2 ، 4^2 ، 6^2 ، ....$ إلى 10 حد

5) $1^3 ، 3^3 ، 5^3 ، .... 19^3 ، 21^3$

المتواليات الحسابية ـ

1) أوجد الحد العاشر ومجموع الحدود العشر الأولى من المتوالية

$7 ، 11 ، 15 ، 14 ، 23 ، ......$

2) أوجد المتوالية الحسابية التي مجموع العشرة الحدود الأولى منها يساوي 120 ومجموع الحدود الستة التالية لها يساوي 168

3) متوالية حسابية حدها الأول يساوي 13 وحدها الأخير يساوي 17 ، فإذا كان مجموع حدودها يساوي 630 ، فما عدد حدودها ؟

4) ثلاثة أعداد تكون متوالية حسابية مجموعهم = 30 وحاصل ضربهم = 510 . أوجد هذه الأعداد .

5) شخص تعهد بسداد مبلغ 39000 دولار على عدد من الأقساط الشهرية بحيث يكون القسط الواحد = 1000 دولار ويزداد كل قسط عن سابقه بمقدار 100 دولار . فأوجد عدد الأقساط الشهرية ؟

6) أوجد مجموع الخمسة عشر حداً الأولى من المتوالية التي حدها العام

$$r_n = (5n - 3)$$

7) أوجد الحد الرابع عشر من المتوالية الحسابية .

$$(-13 ، -18 ، -23 ، ....)$$

المراجع :ـ

- الرياضيات البحته   د. جاسم محمد علي
- مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية تأليف سعيد أحمد حسن وجمال أحمد الوجيش

المصطلحات :ـ

المتسلسلات Series

المتواليات Progrossions

المحاضرة السابعة

المتواليات الهندسية

تمهيد

نرحب بك مجدداً عزيزي وأخي الدارس الكريم إلى المحاضرة السابعة والمخصصة بالكامل للمتواليات الهندسية حيث ربطنا هذه المحاضرة بكثير من الأمثلة المشوقة والممتعة وبعد دراستك للمتوالية الهندسية ستدرك ماذا يقصد مالتوس أو إلى ماذا يرمي بنظريته العجيبة حول السكان والغذاء والتي قال فيها ((إن السكان يتزايدون وفق متوالية هندسية والغذاء وفق متوالية حسابية)) وبعدها ابتكر حله الشيطاني الذي يرمي إلى إبادة السكان بالحروب والمجاعات والأوبئة كي يحصل التوازن بين العنصرين البشري والغذائي . إذا من خلال دراستك للمتواليتين يمكن أن تحلل وتعقب على مفهوم النظرية كما أن هناك تدريبات وتقويمات وتمارين ينبغي حلها .

أهداف المحاضرة : -

بعد دراستك لهذه المحاضرة ينبغي أن تكون قادراً على : -

١ ــ التفريق بين المتواليات الحسابية والهندسية .

٢ ــ حل جميع المسائل المتعلقة بجمع حدود المتوالية الهندسية .

٣ ــ حساب الوسط الهندسي لكميتين .

المحتوى العلمي :-

سنتناول في هذه المحاضرة المتواليات الهندسية وكيفية جمع حدودها وكذا حساب الوسط الهندسي لكميتين وذلك حسب الآتي :-

- المتواليات الهندسية .
- الصورة العامة للمتواليات .

مجموع حدود المتوالية الهندسية .

مجموع عدد غير منته من الحدود .

- حساب الوسط الهندسي للكميتين .
- تقويم ذاتي
- تدريب .

قراءات مساعدة :-

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية :-

WWW.hassona1.Jeeran.com

WWW.ou.cu.edu.eg

المحاضرة السابعة

المتواليات الهندسية

تعريف المتوالية الهندسية :-

هي متسلسلة من الأعداد أو القيم الجبرية مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً بحيث أن النسبة بين أي عددين متتاليين يساوي مقدار ثابت .

فمثلاً مجموعة الأعداد التالية :- (32 ، 16 ، 8 ، 4 ، 2)

نلاحظ أن العدد الثاني 4 ضعف الأول 2 أي أن النسبة بينهما $\frac{4}{2} = 2$

نلاحظ أن العدد الثالث 8 ضعف الثاني 4 أي أن النسبة بينهما $\frac{8}{4} = 2$

وهكذا البقية فإن النسبة بين كل حدين متتاليين ثابتة وهو 2 أي أن هذه المجموعة من الأعداد تتزايد بنسبة ثابتة وهي الضعف أي أن كل حد يساوي ضعف الحد الذي قبله وهي ما يطلق عليها بالمتوالية الهندسية .

وإليك أمثلة للمتواليات الهندسية

1) 12,5 ، 25 ، 50 ، 100 ، 200 نسبة الزيادة (2)

2) 3 ، 9 ، 27 ، 81 ..... نسبة الزيادة (3)

نلاحظ في المتواليات الهندسية أن نسبة الزيادة لو ضربت في أي حد تعطي الحد الذي بعده وهذه النسبة تكون ثابتة وهو ما يسمى في المتوالية الهندسية أساس المتوالية ونرمز له بالرمز (r) .

$$r = \frac{\text{الحد الأول}}{\text{الحد الثاني}} = \frac{\text{الثالث}}{\text{الثاني}} \quad \ldots\ldots$$

الصورة العامة للمتواليات الهندسية :ـ

إذا فرضنا أن الحد الأول (r_1) من متوالية هندسية = a والأساس (r)

$$\therefore r = \frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_2} = \cdots \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} = \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{r_n}{r_{n-1}}$$

$$\therefore \frac{r_2}{r_1} \times \frac{r_3}{r_2} \times \cdots \frac{r_{n-2}}{r_{n-3}} \times \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = \frac{r_n}{r_{n-1}}$$

$= r \times r \times r \times r \cdots \times r \times r (n-1)$ من العوامل

$$\therefore r_n = r_1 r^{n-1}$$

$$\because r_1 = a$$

$\boxed{\therefore r_n = ar^{n-1}}$ ⟵ الحد العام للمتوالية

وبالتعويض عن الحدود ...... n = 1 ، 2 ، 3 نجد أن :ـ

الصورة العامة للمتوالية تكون $(a ، ar ، ar^2 ، ar^3 \ldots\ldots ar^{n-1})$

حيث أن الحد الأول = a والحد الثاني = ar والحد الثالث = ar^2

مثال (1) أوجد الحد السابع في المتوالية .... ، 20 ، 10 ، 5

الحل :ـ

$$\therefore r_n = ar^{n-1}$$

$$r_7 = 5 \times (2)^{7-1} = 5 \times 2^6 = 5 \times 64 = 320$$

مثال (2) متوالية هندسية حدها الأول 10 وأساسها 4 أوجد الأربع الحدود الأولى ؟

الحل :ـ

a = 10 r = 4

صورة المتوالية $a ، ar ، ar^2 ، ar^3$

$$10 ، (10 \times 4) ، (10 \times 4^2) ، (10 \times 4^3)$$

. . الحدود الأربعة تكون 640 ، 160 ، 40 ، 10

مجموع حدود المتوالية الهندسية :ـ

مجموع حدود عددها (n) من متوالية هندسية حدها الأول (a) وأساسها (r) هو

$$S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r} \qquad r < 1$$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1} \qquad r > 1$$

حيث أن S_n هو مجموع المتوالية الهندسية ، ويستخدم هذا القانون في حالة معرفة عـدد الحدود طبع مع معرفة الحد الأول (a) والأساس r .

ولكن إذا عرف الحد الأخير الذي نرمز له (L) فإن مجموع (n) من الحدود يكون

$$S_n = \frac{Lr - a}{r - 1} \qquad r > 1$$

$$S_n = \frac{a - Lr}{1 - r} \qquad r < 1$$

مثال (3) : أوجد مجموع الستة الحدود الأولى من المتوالية الهندسية

(4 ، 12 ، 36 ، ......)

الحل : ـ

$$a = 4 ، \quad r = \frac{12}{4} = 3 > 1 ، \quad n = 6$$

$$S_n = \frac{a\left(r^n - 1\right)}{r - 1} =$$

$$S_6 = \frac{4\left(3^6 - 1\right)}{3 - 1} = \frac{4(729 - 1)}{2} = 1456$$

مثال (4) : أوجد مجموع الستة الحدود الأولى من المتوالية الهندسية

(5 ، -10 ، 20 ، -40 ، ....)

الحل : ــ

$$a = 5 \quad r = \frac{-10}{5} = -2 < 1$$

$$\because S_n = \frac{a\left(1 - r^n\right)}{1 - r}$$

$$S_6 = \frac{5\left(1 - (-2)^6\right)}{1 - (-2)} = \frac{5(1 - 64)}{3}$$

$$= \frac{5 \times -63}{3} = -105$$

مثال (5) : متوالية هندسية حدها الأول 240 وحدها الأخير 30 وأساسها $\frac{1}{2}$ أوجد مجموعها ؟

الحل : ــ

$$a = 240 \qquad L = 30 \qquad r = \frac{1}{2} < 1$$

$$\because S_n = \frac{a - Lr}{1 - r}$$

$$S_n = \frac{240 - \left(30 \times \frac{1}{2}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{240 - 15}{\frac{1}{2}}$$

$$Sn = 225 \times \frac{2}{1} = 450$$

مجموع عدد غير منته من حدود متواليه هندسية : ـ

وهنا نستخدم القانون التالي

$$\boxed{S_\infty = \frac{a}{1-r} \qquad |r| < 1}$$

ونلاحظ أننا لم نستخدم الرمز (n) للحدود لأن الحدود غير معروفة .

مثال (6) : أوجد مجموع المتوالية الهندسية اللانهائية التي حدها الأول 17 وأساسها $\frac{1}{3}$.

الحل : ـ

$$a = 17 \qquad r = \frac{1}{3}$$

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{17}{1-\frac{1}{3}} = \frac{17}{\frac{2}{3}} = \frac{17 \times 3}{2} = 25.5$$

حساب الوسط الهندسي للكميتين :

إذا كان لدينا ثلاثة أعداد تكون متوالية C ، b ، m فإن (b) سمي الوسط الهندسي للحدين الآخرين وتحتسب قيمته كما يلي : ـ

$$\frac{c}{b} = \frac{b}{m}$$

$$b^2 = c \times m$$

$$b = \sqrt{c \times m}$$

وهكذا يمكن أن يطبق على صورة الحدود للمتوالية $\mathbf{a}$ ، $\mathbf{ar}$ ، $\mathbf{ar^2}$

فإن

$$\frac{ar}{a} = \frac{ar^2}{ar}$$

$$ar^2 = a \times ar^2$$

$$ar = \sqrt{a \times ar^2}$$

وبناء على ذلك فإنه يمكن وضع عدد من الأوساط الهندسية (أي الحدود) بين كميتين معلومتين .

مثال (7) : متوالية هندسية حدها الأول 2k وحدها الخامس 32k ، المطلوب إدخال ثلاثة أوساط هندسية ؟

الحل : ــ

الحد الأول $a = 2k \longrightarrow (1)$

الحد الخامس $ar^4 = 32k \longrightarrow (2)$

بقسمه (2) على (1)

$$\frac{ar^4}{a} = \frac{2k}{32k}$$

$$r^4 = 16$$

$$r = 2$$

∴ الأوساط المطلوبة هي : ــ

$$ar = 2k \times 2 = 4k$$

$$ar^2 = 2k \times 2^2 = 8k$$

$$ar^3 = 2k \times 2^3 = 16k$$

مثال (8) : متوالية هندسية حدها الثاني = 36 وحدها الرابع = 9 ، أوجد مجموع العشرة حدودها الأولى ؟

الحل : ــ

الحد الثاني = ar $\quad ar = 36 \longrightarrow (1)$

الحد الرابع = ar^3 $\quad ar^3 = 9 \longrightarrow (2)$

بقسمة (2) على (1)

$$\frac{ar^3}{ar} = \frac{9}{36}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}$$

$$r = \frac{1}{2}$$

ولإيجاد الحد الأول نعوض في (1) : ــ

$$ar = 36$$

$$a\left(\frac{1}{2}\right) = 36$$

$$a = 72$$

$$\because\ Sn = \frac{a(1 - rn)}{1 - r}$$

$$S10 = \frac{72\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{72\left(1 - \frac{1}{1024}\right)}{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{72\left(\frac{1023}{1024}\right)}{\frac{1}{2}} = 71.929 \times 2 = 143.858$$

تقويم ذاتي : ـ

ـ ما الفرق بين المتوالية الهندسية والحسابية ؟

تدريب

أوجد مجموع الستة الحدود الأولى من المتوالية الهندسية (...... ، 20 ، 10- ، 5)

الحل : ــ

....

....

$S_6 = -- 105$

الخلاصة :-

بعد دراستك عزيزي لهذه المحاضرة نخلص منها أن المتسلسلة من الأعداد أو القيم الجبرية المرتبة تصاعدياً أو تنازلياً بحيث أن النسبة بين أي عددين متتاليين يساوي مقدار ثابت هي عبارة عن متوالية هندسية وأن هذه المتوالية يمكن أن نجمع حدودها كما يمكننا أن نجد الوسط الهندسي لكميتين باستخدام قوانين المتواليات .

تمارين

1) متوالية هندسية مكونه من 10 حدود حدها الخامس = 48 وحدها السادس 96 ، أوجد مجموع المتوالية ؟

2) متوالية هندسية مجموعها 49 وحدها الأول = 7 وعدد حدودها = 3 ، أوجد أساس المتوالية ؟

3) متوالية هندسية حدها الأول = 1 وأساسها $\frac{1}{3}$ ، أوجد مجموع الخمسة الحدود الأولى ؟

4) متوالية هندسية مكونه من 4 حدود ، مجموع حديها الأول والثالث = 30 وحديها الثاني والرابع = 90 ، أوجد المتوالية ؟

5) متوالية هندسية حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها 3 ، ومجموعها 60.5 ، أوجد عدد حدودها ؟

6) يراد توزيع مبلغ 6500 يورو بين أربعة أشخاص بحيث يحصل كل شخص على ثلث ما حصل عليه الشخص السابق له ، أوجد قيمة ما يحصل عليه كل شخص ؟

7) إذا كان 1536 هو أحد حدود المتوالية (3 ، 6 ، 12 ، .....) ، فما رتبة هذا الحد ؟

المراجع :ـ

ـ الرياضيات البحته   د. جاسم محمد علي

ـ مقدمة في الرياضياتُ للعلوم الإدارية تأليف / سعيد أحمد حسن وجمال أحمد الوجيش

الوحدة الخامسة

المصفوفات والمحددات

تمهيد

أهلاً بك أخي الدارس في الوحدة الخامسة من مقرر الرياضيات للعلوم الإدارية حيث قسمنا هذه الوحدة إلى محاضرتين الأولى سيكون فيها المصفوفات والمحددات والمحاضرة الثانية سنتطرق إلى استخدام المصفوفات والمحددات في إيجاد المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة وحل المعادلات من الدرجة الأولى كما ستجد فيها بعض التدريبات لاختبار مهاراتك وقدراتك وكذلك التمارين في نهاية كل محاضرة لتثبيت المعلومات .

أهداف الوحدة : -

بعد الانتهاء من دراسة هذه الوحدة ينبغي أن تكون قادراً على الآتي : -

١ ـ إدراك مفهوم المصفوفة وتمييز أنواعها وأشكالها .

٢ ـ التعامل مع العمليات الجبرية على المصفوفات وحل المسائل المتعلقة بها .

٣ ـ فهم المقصود بالمحددة وتمييز درجاتها .

٤ ـ حساب قيمة المحددات بمختلف درجاتها .

٥ ـ التمييز بين المحددة والمصفوفة .

٥ ــ إيجاد مدور أي مصفوفة .

٦ ــ معرفة ما المقصود بالمحددة وتمييز درجاتها .

٧ ــ حساب قيمة المحددة من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة .

٨ ــ التمييز بين المصفوفة والمحددة .

المحتوى العلمي : ـ

سنتناول أخي الدارس في هذه المحاضرة جملة من المواضيع : ــ

مفهوم المصفوفة وأهم أنواعها .

تساوي مصفوفتين .

جمع المصفوفات .

ضرب مصفوفة بعدد .

مدور مصفوفة .

ضرب مصفوفتين .

المحددات وأشكالها .

حساب المحددة من الدرجة الثانية .

حساب المحددة من الدرجة الثالثة بطريقة المحددة الصغرى .

حساب المحددة من الدرجة الثالثة بطريقة ساروس .

حساب المحددة من الدرجة الرابعة وأكثر .

خواص المحددات .

تقويم ذاتي .

قراءات مساعدة : ـ

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية : ـ

WWW.hassona1.Jeeran.com
WWW.ou.cu.edu.eg

المحاضرة الثامنة

المصفوفات والمحددات Matrices & Determinants

تمهيد

نرحب بك أخي الدارس إلى المحاضرة الثامنة حيث ستأخذ فيها موضوعين أساسيين وهما يحملان اسم الوحدة فتدرس أولاً المصفوفات كمفهوم وبعض وأهم أنواع المصفوفات كما ستدرس في هذا الموضوع أيضاً العمليات الجبرية على المصفوفات . أما الموضوع الثاني فستأخذ فيه المحددات كمفهوم وكذلك كيفية حساب قيمة المحددة بمختلف درجاها وقد اكتفينا هنا بالمحددات من الدرجة الثانية والثالثة والرابعة . كما ستجد هناك الكثير من الأمثلة المدعومة بخطوات لحلها . ولا تنسى في نهاية المحاضرة تدريباً سيكون جيداً لك لاختبار مهارتك . وكذلك التمارين لتدعيم المفاهيم التي درستها وإنماء مهاراتك وقدراتك في حل المسائل المختلفة لهذه المحاضرة .

أهداف المحاضرة : ـ

بعد دراستك لهذه المحاضرة ينبغي عزيزي الدارس أن تكون قادراً على : ـ

١ ــ معرفة مفهوم المصفوفة وتمييز أنواعها .

٢ ــ التمييز بين المصفوفات المتساوية من غيرها واستخدامها في حل المسائل .

٣ ــ إيجاد جمع مصفوفتين .

٤ ــ إيجاد حاصل ضرب مصفوفة بعدد وكذلك حاصل ضرب مصفوفتين .

المصفوفات والمحددات
Matrices & Determinants

أولاً : المصفوفات *Matrices*

ليكن لدينا خمسة طلاب A ، B ، C ، D ، E وكانت درجاتهم في مادة الرياضيات هي 85 ، 70 ، 69 ، 72 ، 84 على التوالي ودرجاتهم في الفيزياء هي 77 ، 74 ، 75 ، 73 ، 85 على التوالي فإنه يمكن تنظيم المعلومات بجدول كالآتي : ـ

الطلاب / المواد	A	B	C	D	E
الرياضات	85	70	69	72	84
الفيزياء	77	74	75	73	85

- يعبر الصف الأول من الجدول عن درجات الطلاب في مادة الرياضيات ، ويعبر الصف الثاني عن درجاتهم في مادة الفيزياء .

ويمكن التعبير عن الجدول السابق على النحو التالي : ـ

$$\begin{bmatrix} 85 & 70 & 69 & 72 & 84 \\ 77 & 74 & 75 & 73 & 85 \end{bmatrix}$$

وهذا ما يسمى بالمصفوفة ، حيث تحصر عناصر المصفوفة بين قوسين على الصورة [ ] أو ( )

مفهوم المصفوفة : ـ

المصفوفة هي منظومة من العناصر مرتبة في شكل صفوف وأعمدة ، فإذا كانت المصفوفة لها m من الصفوف ، و n من الأعمدة قيل إن المصفوفة من الشكل $m \times n$.

تستخدم الحروف ...... ، A ، B ، C لكي نرمز للمصفوفات والحروف ...... ، c ، b ، a لكي نرمز للعناصر فمثلاً المصفوفة A والتي تحتوي على عناصر مرتبة في m صفاً و n عمودا تكتب كالتالي : ـ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

أي أن m هو دليل الصف و n هو دليل العمود ، والعنصر a_{mn} هو العنصر الموجود في الصف m والعمود n من المصفوفة .

أنواع المصفوفات :ـ

1) المصفوفة المربعة :

وهي المصفوفة التي عدد صفوفها يساوي عدد أعمدتها ، أي إذا كان $m = n$

فمثلاً المصفوفة التالي هي مصفوفة مربعة من الشكل 3×3

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2) المصفوفة القطرية :ـ

هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها أصفاراً ما عدا عناصر القطر الرئيسي على الأقل إحداها ليس صفراً . أي أن عناصر المصفوفة تكون في الصورة التالية :ـ

$$\boxed{a_{ij} = 0, \quad i \neq j}$$

. مثل المصفوفة التالية : C

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

عناصر القطر الرئيسي

3) مصفوفة الوحدة :ـ

هي مصفوفة مربعة جميع عناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد الصحيح وبقية العناصر أصفارا ، أي عناصر المصفوفة تكون كالتالي :

$$\boxed{a_{ij} = 1, \quad i = j \quad a_{ij} = 0, \quad i \neq j}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4) المصفوفة الصفرية :ـ

هي مصفوفة جميع عناصرها أصفارا . مثل

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

5) المصفوفة المثلثية (العليا أو السفلى) :ـ

هي مصفوفة مربعة بحيث تكون العناصر تحت أو فوق القطر الرئيسي جميعهـا مـساوية للصفر . مثل :

$$E = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$$

تدعى المصفوفة B مصفوفة مثلثية سفلى ، والمصفوفة E هي مصفوفة مثلثية عليا وهناك أيضاً العديد من المصفوفات نكتفي بهذه فقط .

العمليات الجبرية على المصفوفات :ـ

1) تساوي المصفوفات :ـ

يقال للمصفوفتين B ، A أنهما متساويتان إذا تحقق الشرطان :ـ

أ) إذا كانت المصفوفتان من نفس الشكل .

ب) إذا كانت العناصر المتناظرة في المصفوفتين متساوية .

فمثلا المصفوفتان $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$

متساويتان لأنهما من نفس الشكل (2 × 2) وكذلك عناصرهما المتناظرة متساوية .

بينما المصفوفة $C = [\,3 \;\; 5 \;\; 6\,]$ لا تساوي المصفوفة A لأنها تختلف عنها في الشكل .

مثال (1) : إذا كان لدينا المصفوفتان التاليتان $A = \begin{bmatrix} n & y \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ a & m \end{bmatrix}$

فإذا علمت أن A = B فأوجد كلاً من y ، n ، m ، a

الحل :ـ

بما أن A = B فالعناصر المتناظرة فيهما متساوية وبالتالي يكون :ـ

$n = 2$ ، $y = 5$ ، $a = 1$ ، $m = 4$

2) جمع المصفوفات :ـ

لا يمكن جمع مصفوفتان إلا إذا كانتا من نفس الشكل (أي أنه شرط لازم وكافي) . ويكون ناتج عملية الجمع هي مصفوفة من نفس شكلها وعناصرها عبارة عن مجمـــوع العناصـــر المتناظرة في كلتا المصفوفتين .

مثال (2) : ليكن لدينا المصفوفات التالية :ـ

$$A=\begin{bmatrix}20 & 15 & 8\\ 21 & 10 & 14\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}12 & 14 & 25\\ 13 & 16 & 7\end{bmatrix}\qquad C=\begin{bmatrix}5 & 12\\ 9 & 0\end{bmatrix}$$

أوجد : أ) A + B ب) A + C

الحل :ـ

أ) بما أن المصفوفتان A ، B من نفس الشكل (2 × 3)

$$\therefore D=A+b=\begin{bmatrix}20 & 15 & 8\\ 21 & 10 & 14\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}12 & 14 & 25\\ 13 & 16 & 7\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20+12 & 15+14 & 8+25\\ 21+13 & 10+16 & 14+7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 29 & 33\\ 34 & 26 & 21\end{bmatrix}$$

ب) لا يمكن إيجاد A + C لأنهما ليستا من نفس الشكل

مثال (3) : إذا كان

$$C=\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}\qquad B=\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}\qquad A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}$$

أثبت أن A + B + C مصفوفة وحدة

الحل :ـ

$$\therefore D=A+B+C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 3 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1+1+(-1) & 3+2+(-5)\\ -2+(-1)+3 & 4+(-2)+(-1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$ وهي مصفوفة وحدة

3) ضرب مصفوفة بعدد : ـ

لضرب مصفوفة بعدد نضرب كل عنصر من عناصرها بهذا العدد .

مثال (4) : أحسب 4A ، -2A حيث $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

الحل : ـ

$$4A = 4\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 16 & 0 \\ 8 & 12 & 4 \\ 12 & 8 & 8 \end{bmatrix}$$

$$-2A = -2\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -8 & 0 \\ -4 & -6 & -2 \\ -6 & -4 & -4 \end{bmatrix}$$

4) مدور مصفوفة : ـ

إذا كانت A مصفوفة من الشكل m × n فإن مدور المصفوفة A ويرمز له بالرمز $\overline{A}$ هو مصفوفة من الشكل n × m ناتجة من المصفوفة A بعد تحويل صفوفها إلى أعمدة وأعمدتها إلى صفوف .

مثال (5) : أوجد مدور كل من المصفوفات التالية : ـ

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 5 & 6 & -7 \end{bmatrix}$$

الحل : ـ

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad \overline{B} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \overline{C} = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ -7 \end{bmatrix}$$

5) ضرب مصفوفتين : ـ

يشترط لكي تكون عملية ضرب مصفوفتين ممكنة أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية .

فإذا كانت المصفوفة A من الشكل $m \times n$ والمصفوفة B من الشكل $n \times L$ فإن $A\times B=C$ حيث C من الشكل $m \times L$ أي أن عدد صفوفها مساويا لصفوف الأولى وعدد أعمدتها مساوياً لأعمدة الثانية .

فكل عنصر من عناصر مصفوفة حاصل الضرب (C) وليكن C_{ij} هو عبارة عن مجموع حواصل ضرب عناصر الصف i من المصفوفة A بالعناصر المناظرة لها من العمود j من المصفوفة B أي أن : ـ

$$\boxed{C_{ij} = a_{i1} \times b_{1j} \times a_{i2} \times b_{2j} + \cdots\cdots + a_{in} \times b_{nj}}$$

مثال (6) : أحسب حاصل الضرب $A \times B$ حيث

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل : ـ

بما أن A من الشكل 2×3 و B من الشكل 3×2 فإن عملية الضرب ممكنة ويكون حاصل الضرب مصفوفة لتكن D من الشكل 2×2 .

ولتسهيل عملية الضرب يمكن أن نتبع الخطوات التالية :

1) نكتب العمود الأول من B في موازاة صفوف A : $\begin{array}{c} \boxed{1 \quad 6 \quad 5} \\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$

2) نحصل على العمود الأول من D وهو $\begin{bmatrix} 5\times 1 + 1\times 6 + 2\times 5 \\ 1\times 1 + 4\times 6 + 3\times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 40 \end{bmatrix}$

3) نكتب العمود الثاني من B في موازاة صفوف A : $\begin{array}{c} \boxed{2 \quad 4 \quad 3} \\ \begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$

4) نحصل على العمود الثاني من D وهو : $\begin{bmatrix} 5\times 2 + 1\times 4 + 2\times 3 \\ 1\times 2 + 4\times 4 + 3\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 27 \end{bmatrix}$

5) مصفوفة حاصل الضرب D هي : ــ $\begin{bmatrix} 21 & 20 \\ 40 & 27 \end{bmatrix}$

مثال (7) : أحسب حاصل الضرب A × B حيث

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل : ــ

نلاحظ أن المصفوفة الناتجة من حاصل الضرب من الشكل 2 × 3

بالإمكان جمع الخطوات السابقة مع بعض كالتالي : ــ

$$A \times B = \begin{bmatrix} (-1)\times(-3)+(-2)\times 2+(-2)\times 2 & (-1)\times(-6)+(-2)\times 4+(-2)\times 3 \\ 1\times(-3)+2\times 2+1\times 2 & 1\times(-6)+2\times 4+1\times 3 \\ (-1)\times(-3)+(-1)\times 2+0\times 2 & (-1)\times(-6)+(-1)\times 4+0\times 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -8 \\ 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

ثانياً : المحددات *Determinants*

تعريف المحددة : ـ

المحددة عبارة عن منظومة من الأعداد (العناصر) مرتبة في شكل صفوف وأعمدة بحيث يكون عدد الصفوف مساو لعدد الأعمدة . وتكتب هذه العناصر أو الأعداد بين خطين رأسيين متوازيين .

وتتحدد درجة المحددة بناءاً على عدد الصفوف والأعمدة فمثلاً : ـ

$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ هي محددة من الدرجة الثانية لأن عدد صفوفها وأعمدتها يساوي 2 .

بينما $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ هي محددة من الدرجة الثالثة لأن عدد صفوفها وأعمدتها يساوي 3 وهكذا ....

المحددة من الدرجة الثانية : ـ

محددة الدرجة الثانية هي عبارة عن حاصل ضرب عنصري القطر الرئيسي مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الثانوي . أي أن : ـ

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

مثال (1) أوجد قيمة المحددات التالية : ـ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \qquad |B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$$

الحل : ـ

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \times 3 - (-1) \times 4 = 6 - (-4) = 10$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - (-2) \times 1 = 12 - (-2) = 14$$

المحددة من الدرجة الثالثة :-

لكل عنصر من عناصر المحددة يوجد محددة صغرى (أو محيدد) موافقة لهذا العنصر وهي المحددة التي تبقى من المحددة الأصلية بعد أن نحذف منها الصف والعمود اللذين يقع فيهما ذلك العنصر : أي أن المحددة الصغرى هي محددة من الدرجة الثانية فمثلاً المحددة | A |

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

فالمحددة الصغرى للعنصر a_{11} هي المحددة الباقية من | A | بعد حذف الصف الأول والعمود الأول أي

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

والمحددة الصغرى للعنصر a_{21} هي المحددة الباقية بعد حذف الصف الثاني والعمود الأول أي :

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{32}$$

العامل المرافق للعنصر :-

هو المحددة الصغرى المرافقة لهذا العنصر مضروبه بـ 1+ أو 1- حسبما يكون مجموع رقمي الصف والعمود اللذين يقع فيهما العنصر فإذا كان المجموع زوجياً ضربنا بـ 1+ وإذا كان المجموع فردياً ضربنا بـ 1- .

العامل المرافق للعنصر a_{11} هو محددته الصغرى مضروبه بـ 1+ لأن مجموع رقمي الصف والعمود اللذين يقع فيهما a_{11} هو (1+1) زوجياً . وبالتالي يصبح العامل المرافق لـ a_{11} هو نفسه المحددة الصغرى له أي

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$$

الآن يمكن أن نعرف المحددة من الدرجة الثالثة بأنه مجموع حواصل ضرب عناصر أي صف بالعوامل المرافقة لها . أو مجموع حواصل ضرب عناصر أي عمود بالعوامل المرافقة لها .

ملاحظة : ـ

يمكن حساب المحددة من الدرجة الثالثة بستة أشكال مختلفة لأنه يتضمن ثلاثة صفوف وثلاثة أعمدة .

مثال (2) : أحسب | A | حيث
$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 6 \end{vmatrix}$$

الحل : ـ لنحسب | A | وفق عناصر الصف الأول : ـ

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & 7 & 6 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 7 \end{vmatrix}$$
$$= 4(5\times 6-(-1)\times 7)-(3\times 6-(-1)\times(-2))+2(3\times 7-5\times(-2))$$
$$= 4(30+7)-(18-2)+2(21+10)$$
$$= 4\times 37-16+2\times 31$$
$$= 148-16+62$$
$$= 194$$

مثال (3) : أحسب | B | حيث
$$|B| = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 13 & -7 \end{vmatrix}$$

الحل : ـ لنحسب | B | وفق عناصر العمود الثاني

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 13 & -7 \end{vmatrix} = -1\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} - 13\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= -1(3\times(-7)-(-1)\times 1)+5(4\times(-7)-2\times 1)-13(4\times(-1)-2\times 3)$$
$$= -(-21+1)+5(-28-2)-13(-4-6)$$
$$= -(-20)+5(-30)-13(-10)$$
$$= 20-150+130$$
$$= 0$$

طريقة ساروس لحساب المحددات من الدرجة الثالثة : ـ

وهنا نقوم بكتابة العمودان الأول والثاني بعد الثالث (أي خارج المحددة) مباشرة ثم نحسب القيمة بجمع حواصل ضرب عناصر الأقطار الرئيسية الثلاثة ثم نطرح حواصل ضرب عناصر الأقطار الثلاثة من الجهة الأخرى .

ويمكن تمثيلها في المحددة | A | كالتالي : ـ

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array} \begin{array}{l} =(a_{11}a_{22}a_{33})+(a_{12}a_{23}a_{31})+(a_{13}a_{21}a_{32}) \\ -(a_{13}a_{22}a_{31})-(a_{11}a_{23}a_{32})-(a_{12}a_{21}a_{33}) \end{array}$$

<u>مثال (4)</u> : أحسب المحددة | D | حيث
$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

الحل : ـ نقوم بكتابة العمود الأول والثاني بعد الثالث مباشرة

$$D = \left|\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{array}\right| \begin{array}{cc} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{array} =(1\times5\times9)+(2\times6\times7)+(3\times4\times8)-(3\times5\times7)-(1\times6\times8)-(2\times4\times9)$$

$$=45+84+96-105-48-72=0$$

المحددات من الرتبة الرابعة فأكثر : ـ

لحساب قيمة المحددة من الرتبة الرابعة أو أكثر فإننا نأخذ أي عمود أو صف كما فعلنا في محددة الرتبة الثالثة بطريقة الصفوف أو الأعمدة . ثم نحسب المحددة الصغرى لعناصر الصف أو العمود المأخوذ (المحددة الصغرى هنا من الرتبة الثالثة) .

قاعدة إيجاد أو حساب المحددة من الرتبة الرابعة أو أكثر هي نفسها قاعدة حساب المحددة من الرتبة الثالثة وهي عبارة عن مجموع حاصل ضرب عناصر أي صف بالعوامل المرافقة لها ، أو مجموع حاصل ضرب عناصر أي عمود بالعوامل المرافقة لها .

مثال (5) : أحسب قيمة المحددة التالية :

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 8 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}$$

الحل : باستخدام عناصر الصف الثاني

ملاحظة : يرمز لقيمة المحددة أحياناً بـ Δ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 & 8 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -4 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} = -(-3)\begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -2 & -4 & 9 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & 9 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 9 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 0 & -2 & -4 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$$

سنجد المحددات الثلاث الأولى بطريقة ساروس . أما الرابعة فـلا داعـي لإيجادهـا لأنهـا مضروبة بالعدد (صفر) وبالتالي سيكون الحد كله مساويا الصفر .

$$\begin{vmatrix} 0 & 7 & 8 \\ -2 & -4 & 9 \\ 5 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 0 & 7 \\ -2 & -4 \\ 5 & 6 \end{matrix} = (0\times(-4)\times(-1)) + (7\times 9\times 5) + (8\times(-2)\times 6) - (8\times(-4)\times 5) - (0\times 9\times 6) - (7\times(-2)\times(-1))$$

$$= 0+315-96+160-0-14=365$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 7 & 8 \\ 0 & -4 & 9 \\ 4 & 6 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 7 \\ 0 & -4 \\ 4 & 6 \end{matrix} = (2\times(-4)\times(-1)) + (7\times 9\times 4) + (8\times 0\times 6) - (8\times(-4)\times 4) - (2\times 9\times 6) - (7\times 0\times(-1))$$

$$= 8+252+0+128-108-0=280$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 9 \\ 4 & 5 & -1 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \\ 4 & 5 \end{matrix} = (2\times(-2)\times(-1)) + (0\times 9\times 4) + (8\times 0\times 5) - (8\times(-2)\times 4) - (2\times 9\times 5) - (0\times 0\times(-1))$$

$$= 4+0+0+64-90-0=-22$$

$$\therefore \Delta = -(-3)\times 365 + 1\times 280 - 2\times(-22) = 1095 + 280 + 44 = 1419$$

خواص المحددات :-

1 ـ إذا تطابق صفان (أو عمودان) من محددة فإن قيمتها تساوي صفراً .

2 ـ لا تتغير قيمة المحددة إذا تم تبديل الصفوف بالأعمدة والعكـس أي أن قيمـة محـددة يساوي قيمة مدورها . $|A| = |\bar{A}|$

3 ـ تتغير إشارة قيمة المحددة فقط إذا تم تبديل صفين (أوعمـودين) متجـاورين مـن صفوف أو أعمدة المحددة ببعضها البعض .

4 ـ إذا تناسب عناصر صف (عمود) من مصفوفة مع العناصر المناظرة لها من صف آخر (أو عمود آخر) فإن قيمتها تساوي صفراً .

5 ـ إذا وجد عامل مشترك لعناصر صف (أو عمود) في المحددة فإن قيمة المحددة تساوي حاصل ضرب ذلك العامل المشترك في المحددة بعد إخراج العامل المشترك .

6 ـ المحددة التي على شكل مصفوفة مثلثية قيمتها تساوي حاصل ضرب عناصر قطرها الرئيسي

7 ـ إذا أضيفت أو طرحت عناصر صف (أو عمود) أو مضاعفاتها إلى العناصر المناظرة لصف آخر (أو لعمود آخر) فإن قيمة المحددة لا تتغير .

8 ـ إذا كانت جميع عناصر أحد الصفوف (أو الاعمدة) في المحددة أصفارا فإن قيمة المحددة تساوي صفراً .

تقويم ذاتي

ـ ماذا نقصد بالمصفوفة ؟

ـ ما هو الشرط لتساوي مصفوفتين ؟

ـ ما هو الشرط اللازم توفره لجمع مصفوفتين ؟

ـ ما الذي يشترط لكي تكون عملية ضرب مصفوفتين ممكنة ؟

ـ ماذا نفعل لإيجاد مدور مصفوفة ؟

ـ ماذا نقصد بالمحددة ؟

ـ ما المقصود بالعامل المرافق للعنصر ؟

ـ كيف نحسب المحددة من الدرجة الثانية ؟

ـ كيف نحسب المحددة من الدرجة الثالثة بطريقة ساروس ؟

تدريب

إذا كان لدينا

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد $A \times \overline{B}$

الحل : ـ

نوجد أولاً مدور B $\overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

بما أن A من الشكل (2 × 2) وB من الشكل (3 × 2) أي أن محددة الـضرب ممكـن وتكون المصفوفة : ـ

$$\therefore A \times \overline{B} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \times 1 + 1 \times 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ 0 \times 1 + 3 \times 0 & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 5 & 5 \\ 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

الخلاصة :ـ

في هذه المحاضرة تعرفت عزيز الدارس على : ـــ

ــ المصفوفة بأنها منظومة من العناصر مرتبة في شكل صفوف وأعمدة ولهـا أشـكال مختلفة حسب عدد صفوفها وعدد أعمدتها .

ــ المصفوفات لا تتساوى إلا إذا كانت من نفس الشكل وكانت العناصر المتنـاظرة فيها متساوية .

ــ لا يمكن جمع مصفوفتان إلا إذا كانتا من نفس الشكل .

ــ أما شرط ضرب مصفوفتين هو أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى مساوياً لعدد صفوف المصفوفة الثانية .

ــ لضرب مصفوفة بعدد نضرب كل عنصر من عناصر المصفوفة بهذا العدد .

ــ مدور أي مصفوفة ينتج من تحويل صفوف المـصفوفة إلى أعمـدة والأعمـدة إلى صفوف .

ــ قيمة محددة الدرجة الثانية عبارة عن حاصل ضرب عنـصري القطـر الرئيـسي مطروحاً منه حاصل ضرب عنصري القطر الثانوي .

ــ قيمة محددة الدرجة الثالثة هو مجموع حواصل ضرب عناصر أي صف (أو عمود) بالعوامل المرافقة لها وهي نفس القاعدة التي نحسب بها قيمة المحددة مـن الرتبـة الرابعة أو أكثر .

ــ في محددة الرتبة الثالثة بطريقة ساروس نقوم بكتابة العمودين الأول والثـاني بعـد الثالث مباشرة ثم نحسب القيمة بجمع حواصل ضرب عناصر الأقطـار الرئيـسية الثلاثة ثم نطرح حواصل ضرب عناصر الأقطار الثلاثة من الجهة الأخرى .

تمارين

1) أوجد قيم z ، y ، x في الآتي :

$$a)\begin{bmatrix} 2 & x \\ x+y & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 5 & z-y & z \\ 1 & x+y & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

2) بين أن 3A − B + 2C تساوي مصفوفة الوحدة حيث : ـ

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -3 & -6 & 2 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \qquad c = \begin{bmatrix} -8.5 & -9 & 4 \\ -5 & -5 & 2.5 \\ 4 & 4.5 & 3.5 \end{bmatrix}$$

3) لتكن $C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$

فأحسب : ـ

$$a)A+C \qquad b)A-B \qquad c)(A+c)-(A-B) \qquad d)(\overline{A}+\overline{C})$$

4) إذا كان $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ $\qquad D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ أوجد $b)D\times A$ $\qquad a)A\times D$

قارن بين $A \times D$ $\qquad D \times A$

5) إذا كان $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ بين أن A^2 مصفوفة الوحدة .

6) أحسب قيمة المحددات التالية : ـ

$$a)\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \qquad d)\begin{vmatrix} 0.5 & 2.3 \\ 0.1 & 2.8 \end{vmatrix}$$

7) أحسب قيمة المحددات التالية مرة بطريقة المرافق ومرة بطريقة ساروس

$$a)\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}$$

8) أحسب قيمة المحددة : ـ

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

المراجع :-

ـ مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية ، تأليف : سعيد أحمد حسن وجمال أحمد الوجيش .

ـ الرياضيات البحته د/ جاسم محمد علي .

ـ الرياضيات في الاقتصاد والتجارة والعلوم الإدارية د/ أحمد الأشقر .

المصطلحات :-

ـ المصفوفات : **Matrices**

ـ المصفوفة المربعة : **Square Matrix**

ـ المصفوفة القطرية : **Diagonal Matrix**

ـ مصفوفة الوحدة : **Identity Matrix**

ـ المصفوفة المثلثية : **Triangular Matrix**

ـ مدور المصفوفة : **Transpose of A matrix**

ـ المحددة : **Determinant**

ـ المحيدد : **Minor**

ـ العامل المرافق : **Co-factor**

المحاضرة التاسعة

المعكوس الضربي للمصفوفة وحل نظام المعادلات من الدرجة الأولى

تمهيد

أهلاً وسهلاً عزيزي الدارس في المحاضرة التاسعة من مقرر الرياضيات للعلوم الإدارية حيث سنأخذك أولاً مع المعكوس الضربي للمصفوفة المربعة أو ما يسمى (المقلوب) وكيفية إيجاده عن طريق المحددة ومن ثم سنعرج على حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين وبثلاثة مجاهيل باستخدام المحددات والمصفوفات . كما هناك تدريباً نهاية هذه المحاضرة نرجو أن تحله كي يساعدكم على فهم وتثبيت المعلومات المتعلقة بها ، وهناك أيضاً تمارين في الأخير فحلها كي تزيد من مهاراتك وقدراتك .

أهداف المحاضرة : ـ

ينبغي عليك عزيزي الدارس بعد نهاية المحاضرة أن تكون قادراً على : ـ

١ ــ إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة من الرتبة الثانية .

٢ ــ إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة من الرتبة الثالثة .

٣ ــ حل نظام معادلات الدرجة الأولى بمجهولين وثلاثة مجاهيل باستخدام المصفوفات

٤ ــ حل نظام معادلات الدرجة الأولى بمجهولين وثلاثة مجاهيل باستخدام المحددات .

المحتوى العلمي :-

سنتناول أخي العزيز في هذه المحاضرة جملة من المواضيع :ـ

المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة من الرتبة الثانية وطريقة إيجاده .

المعكوس الضربي لمصفوفة مربعة من الرتبة الثالثة وطريقة إيجاده .

حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين باستخدام المصفوفات .

حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى بثلاثة مجاهيل باستخدام المصفوفات .

حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى بمجهولين باستخدام المحددات (طريقة كرامر)

حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى بثلاثة مجاهيل باستخدام المحددات (طريقة كرامر)

تقويم ذاتي .

قراءات مساعدة :-

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية :-

WWW.hassona1.Jeeran.com

WWW.ou.cu.edu.eg

المحاضرة التاسعة

المعكوس الضربي للمصفوفة وحل نظام المعادلات من الدرجة الأولى

أولاً : المعكوس الضربي للمصفوفة (مقلوب المصفوفة)

لتكن A مصفوفة مربعة من الشكل (n × n) ونفترض وجود مصفوفة B تــدعى من الرتبة نفسها بحيث حاصل ضربهما يساوي مصفوفة الوحدة فإن المصفوفة B تــدعى معكوس المصفوفة A (النظير الضربي لها) ويرمز لها بالرمز A^{-1} .

ملاحظة : لا يوجد معكوس ضربي للمصفوفة المربعة التي محددتها تساوي صفراً .

إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة من الرتبة الثانية :ـ

لتكن $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ولإيجاد A^{-1} نتبع الآتي :ـ

1) نوجد محددة المصفوفة A ، $|A| = \Delta$ ($\Delta \neq 0$ لكي يوجد لها معكوس)

$$\boxed{\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \quad \neq 0}$$

2) نبدل عناصر القطر الرئيسي ونعكس إشارات عناصر القطر الثانوي $\boxed{\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$

3) نضرب الناتج في $\frac{1}{\Delta}$ فنحصل على A^{-1} أي $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$

مثال (1) : أوجد معكوس المصفوفة A حيث $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

الحل :ـ

$$|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 3 \times 4 - 5 \times 1 = 12 - 5 = 7$$

إذاً يوجد معكوس للمصفوفة A

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4/7 & -5/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{bmatrix}$$

ملاحظة :ـ

للتأكد من صحة حلك قم بعملية الضرب $A \times A^{-1}$ فإذا أعطيت مصفوفة الوحدة كان الحل صحيحا .

$$A \times A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/7 & -5/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 4/7 + 5 \times (-1/7) & 3 \times (-5/7) + 5 \times 3/7 \\ 1 \times 4/7 + 4 \times (-1/7) & 1 \times (-5/7) + 4 \times 3/7 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12/7 - 5/7 & -15/7 + 15/7 \\ 4/7 - 4/7 & -5/7 + 12/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/7 & 0 \\ 0 & 7/7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

وهي مصفوفة الوحدة وبالتالي فــإن الحــل صــحيح أي أن $\begin{bmatrix} 4/7 & -5/7 \\ -1/7 & 3/7 \end{bmatrix}$ هــي المعكوس للمصفوفة A .

إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة من الرتبة الثالثة :ـ

لتكن A مصفوفة من الرتبة الثالثة : ــ

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

ولإيجاد المعكوس A^{-1} نتبع الخطوات التالية : ــ

1) نوجد قيمة المحددة للمصفوفة A $\quad |A| = \Delta \neq 0$ (إذا كان $\Delta = 0$ فلا يوجد معكوس ضربي لها)

2) نحسب مرافقات العناصر للمصفوفة A فمثلا مرافق $\boxed{a_{11} = \Delta_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$

بينما مرافق $\boxed{a_{12} = \Delta_{12} = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}}$ .... وهكذا .

3) نوجد مصفوفة المرافقات ويكون ذلك باستبدال كل عنصر من A بالمرافق المناظر لهذا العنصر . ونحصل على مصفوفات المرافقات كالتالي : ــ

$$\boxed{m = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{12} & \Delta_{13} \\ \Delta_{21} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{31} & \Delta_{32} & \Delta_{33} \end{bmatrix}}$$

4) نوجد مدور مصفوفة المرافقات وهي عبارة عن المصفوفة المساعدة : ــ

$$\boxed{\overline{m} = \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{23} \\ \Delta_{13} & \Delta_{23} & \Delta_{33} \end{bmatrix}}$$

5) نقسم المصفوفة المساعدة ($\overline{m}$) على قيمة المحددة Δ (نضربها في $\frac{1}{\Delta}$) فنحصل على معكوس المصفوفة A^{-1} أي

$$\boxed{A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\overline{m}}$$

مثال (2) : أوجد معكوس المصفوفة التالية : ــ

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -10\end{bmatrix}$$

الحل : ــ

1) نوجد Δ = | A |

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ 4 & -2 & 1\\ 1 & 2 & -10\end{vmatrix}\begin{matrix}1 & 0\\ 4 & -2\\ 1 & 2\end{matrix}=(1\times(-2)\times(-10))+(0\times1\times1)+(-2\times4\times2)-(-2\times(-2)\times1)-(1\times1\times2)-(0\times4\times(-10))$$

$$=20+0-16-4-2-0=-2$$

2) نوجد مرافقات العناصر : ــ

$$\Delta_{11}=+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 2 & -10\end{vmatrix}=20-2=18$$

$$\Delta_{12}=-\begin{vmatrix}4 & 1\\ 1 & -10\end{vmatrix}=-(-40-1)=41$$

$$\Delta_{13}=+\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 2\end{vmatrix}=8-(-2)=10$$

$$\Delta_{21}=-\begin{vmatrix}0 & -2\\ 2 & -10\end{vmatrix}=-(0-(-4))=-4$$

$$\Delta_{22}=+\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -10\end{vmatrix}=-10-(-2)=-8$$

$$\Delta_{23}=-\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-(2-0)=-2$$

$$\Delta_{31}=+\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0-(4)=-4$$

$$\Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -(1-(-8)) = -9$$

$$\Delta_{33} = +\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -2-0 = -2$$

3) توجد مصفوفات المرافقات : ــ

$$m = \begin{bmatrix} 18 & 41 & 10 \\ -4 & -8 & -2 \\ -4 & -9 & -2 \end{bmatrix}$$

4) توجد مدور مصفوفات المرافقات m (المصفوفة المساعدة) : ــ

$$\overline{m} = \begin{bmatrix} 18 & -4 & -4 \\ 41 & -8 & -9 \\ 10 & -2 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\overline{m} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 18 & -4 & -4 \\ 41 & -8 & -9 \\ 10 & -2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 2 \\ -41/2 & 4 & 9/2 \\ -5 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

مثال (3) : أوجد معكوس المصفوفة التالية : ــ

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل : ــ

نلاحظ على المصفوفة B تطابق صفيها الأول والثالث

$\therefore \Delta = |B| = 0$ (حسب خواص المحددات)

إذا لا يوجد معكوس لهذه المصفوفة .

ثانياً : حل نظام المعادلات من الدرجة الأولى

من تطبيقات المصفوفات والمحددات استخدامها في حل معادلات الدرجة الأولى .

أولاً : حل نظام المعادلتين باستخدام المصفوفات : ـ

مثال (1) : حل المعادلتين الآنيتين باستخدام المصفوفات :

$$x + 3y = 1$$
$$4x - y = -2$$

الحل : ـ

1) أول خطوة دائماً نقوم بها هي ترتيب المعادلات على النحو التالي $ax + by = c$

2) نكتب المعادلتين في صورة المصفوفات كالتالي : ـ

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \ (1)$$

المصفوفة الأولى تمثل مصفوفة المعاملات حيث نكتب العمود الأول معاملات المتغير الأول وهو هنا x والعمود الثاني في معاملات المتغير الثاني وهو هنا y . بينما المصفوفة الثانية هي مصفوفة المتغيرات حسب ترتيب ورودها . أما المصفوفة في الطرف الآخر هي مصفوفة النواتج .

3) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 12 = -13 \neq 0$$

$$\text{المعكوس} = \frac{-1}{13} \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/13 & 3/13 \\ 4/13 & -1/13 \end{bmatrix}$$

4) نضرب طرفي المعادلة (1) في معكوس المصفوفة : ـ

$$\begin{bmatrix} 1/13 & 3/13 \\ 4/13 & -1/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/13 & 3/13 \\ 4/13 & -1/13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(من خواص المعكوس أن حاصل ضرب المصفوفة في معكوسها يعطينا مصفوفة الوحدة)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/13 & - & 6/13 \\ 4/13 & + & 2/13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/13 \\ 6/13 \end{bmatrix}$$

من تساوي المصفوفتان ينتج أن : ــ $y = \frac{6}{13}$ $x = \frac{-5}{13}$

مثال (2) : حل نظام المعادلات التالية باستخدام المصفوفات : ــ

$$2x - y + z = 0$$
$$x - 4y - 3z = 1$$
$$3x + y + 2z = 3$$

الحل : ــ

نكتب المعادلات في صورة مصفوفات : ــ

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow (1)$$

نوجد معكوس مصفوفة المعاملات : ــ

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}\begin{matrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{matrix} = (2\times(-4)\times 2) + (-1\times(-3)\times 3) + (1\times 1\times 1) - (1\times(-4)\times 3) - (2\times(-3)\times 1) - (-1\times 1\times 2)$$

$$= -16 + 9 + 1 + 12 + 6 + 2 = 14 \neq 0$$

$$\Delta_{11} = +\begin{vmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8 - (-3) = -5$$

$$\Delta_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(2 - (-9) = -11$$

$$\Delta_{13} = +\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-12) = 13$$

$$\Delta_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(-2 - 1) = 3$$

$$\Delta_{22} = +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 3 = 1$$

$$\Delta_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -(2-(-3)) = -5$$

$$\Delta_{31} = +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -3 \end{vmatrix} = 3-(-4) = 7$$

$$\Delta_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -(-6-1) = 7$$

$$\Delta_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = -8-(-1) = -7$$

إذا مصفوفة المرافقات هي

$$m = \begin{bmatrix} -5 & -11 & 13 \\ 3 & 1 & -5 \\ 7 & 7 & -7 \end{bmatrix}$$

إذا المصفوفة المساعدة $\overline{m}$ هي :

$$\overline{m} = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 7 \\ -11 & 1 & 7 \\ 13 & -5 & -7 \end{bmatrix}$$

إذا معكوس المصفوفة هو : ــ

$$\frac{1}{14}\overline{m} = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} -5 & 3 & 7 \\ -11 & 1 & 7 \\ 13 & -5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/14 & 3/14 & 1/2 \\ -11/14 & 1/14 & 1/2 \\ 13/14 & -5/14 & -1/2 \end{bmatrix}$$

نضرب طرفي المعادلة (١) في معكوس المصفوفة : ــ

$$\begin{bmatrix} -5/14 & 3/14 & 1/2 \\ -11/14 & 1/14 & 1/2 \\ 13/14 & -5/14 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/14 & 3/14 & 1/2 \\ -11/14 & 1/14 & 1/2 \\ 13/14 & -5/14 & -1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + \frac{3}{14} + \frac{3}{2} \\ 0 + \frac{1}{14} + \frac{3}{2} \\ 0 - \frac{5}{14} - \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{7} \\ \frac{11}{7} \\ \frac{-13}{7} \end{bmatrix}$$

$$\therefore x = \frac{12}{7} \qquad y = \frac{11}{7} \qquad z = \frac{-13}{7}$$

ثانياً : حل نظام المعادلات باستخدام المحددات (طريقة كرامر) :ـ

مثال (3) : حل المعادلتين الآتيتين باستخدام المحددات .

$$2x - 3y = 8$$

$$3x = 1 - y$$

الحل :ـ

نعيد ترتيب المعادلات أولاً على الصورة : $ax + by = c$ فنحصل على :ـ

$$2x - 3y = 8$$

$$3x + y = 1$$

نوجد Δ وهي محددة المعاملات

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - (-9) = 11$$

نوجد Δx وهي المحددة الناتجة بعد تبديل معاملات x بالنواتج (الحدود المطلقة)

$$\therefore \Delta x = \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 8 - (-3) = 11$$

وبالمثل نوجد Δy وهي المحددة الناتجة بعد تبديل معاملات y بالنواتج :

$$\therefore \ \Delta y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 24 = -22$$

وتكون $x = \dfrac{\Delta x}{\Delta}$ $\qquad$ $y = \dfrac{\Delta y}{\Delta}$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-22}{11} = -2 \qquad\qquad x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{11}{11} = 1$$

مثال (4) : حل نظام المعادلات التالي باستخدام المحددات : ـ

$$x + y - 3z = 2$$
$$3x - 2y - z = 4$$
$$x + y + z = 6$$

نوجد Δ :

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -1 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| = (1\times(-2)\times1)+(1\times(-1)\times1)+((-3)\times3\times1)-((-3)\times(-2)\times1)-(1\times(-1)\times1)-(1\times3\times1)$$

$$=-2-1-9-6+1-3=-20$$

$$\Delta x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 4 & -2 \\ 6 & 1 & 1 & 6 & 1 \end{array}\right| = (2\times(-2)\times1)+(1\times(-1)\times6)+(-3\times4\times1)-(-3\times(-2)\times6)-(2\times(-1)\times1)-(1\times4\times1)$$

$$=-4-6-12-36+2-4=-60$$

$$\Delta y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right| = (1\times4\times1)+(2\times(-1)\times1)+(-3\times3\times6)-(-3\times4\times1)-(1\times(-1)\times6)-(2\times3\times1)$$

$$=4-2-54+12+6-6=-40$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}1&1&2\\3&-2&4\\1&1&6\end{vmatrix}\begin{matrix}1&1\\3&-2\\1&1\end{matrix}=(1\times(-2)\times6)+(1\times4\times1)+(2\times3\times1)-(2\times(-2)\times1)-(1\times4\times1)-(1\times3\times6)$$

$$=-12+4+6+4-4-18=-20$$

$$\therefore x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-60}{-20}=3 \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-40}{-20}=2 \qquad z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{-20}{-20}=1$$

ملاحظة : ـ

1 ـ إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن مجموعة المعادلات لها حل وحيد .

2 ـ إذا كان $\Delta = 0$ فهناك حالتان : ـ

أ) إما $\Delta x = 0$ وبالتالي فإن لمجموعة المعادلات حلول لا نهائية .

ب) أو $\Delta x \neq 0$ عندها تصبح لمجموعة المعادلات غير قابلة للحل .

(ينطبق الحال على Δy ، Δz بالنسبة للملاحظة (2))

تقويم ذاتي

ـ ماذا يعطينا حاصل الضرب ($A \times A^{-1}$)

ـ هل يوجد معكوس ضربي لمصفوفة محددها تساوي الصفر ؟

ـ ماذا نقصد بالمصفوفة ؟

ـ في حل نظام المعادلات في الدرجة الأولى ماذا يعني $\Delta \neq 0$ ؟

ـ وماذا يعني $\Delta = 0$ ؟

تدريب

أوجد حل نظام المعادلات التالية باستخدام المحددات : .

$$x + y - 2z = 0$$
$$2x - y + 5z = 6$$
$$3x + 2y - z = 4$$

الحل : ــ نكتب المعادلات باستخدام المصفوفات : ــ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{bmatrix}$$

نوجد كل من Δ محددة المعاملات وكذلك Δx ، Δy ، Δz

$$\Delta = \left|\begin{matrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{matrix} = (1 \times -1 \times -1) + (1 \times 5 \times 3) + (-2 \times 2 \times 2)$$

$$- (-2 \times -1 \times 3) - (1 \times 5 \times 2) - (1 \times 2 \times -1) =$$

أكمل

الجواب $z = 1$ ، $y = 1$ ، $x = 1$

الخلاصة :-

في هذه المحاضرة تعرفنا على المعكوس الضربي لمصفوفة هي المصفوفة التي إذا ضـــربناها بالمصفوفة الأصلية تعطينا مصفوفة الوحدة .

- لا يوجد معكوس ضربي للمصفوفة التي محددها تساوي صفراً .
- إيجاد المعكوس الضربي لمصفوفة من الرتبة الثانية من خلال إيجاد محـــددة المـــصفوفة ومن ثم نبدل عناصر القطر الرئيسي ونعكس إشارات عناصر القطـــر الثـــانوي ثم نضرب الناتج في مقلوب قيمة المحددة .
- أما معكوس المصفوفة من الرتبة الثالثة فإننا نوجد قيمة المحددة للمصفوفة ثم نحسب مرافقات عناصر المصفوفة ونستبدلها بعناصر المصفوفة الأصلية وبعدها نوجد مدور هذه المصفوفة التي تسمى بالمصفوفة المساعدة وأخيراً نضربها بمقلوب قيمة المحددة .
- لحل نظام المعادلات باستخدام المصفوفات نرتب أولاً المعادلات ثم نكتبـــها علـــى صورة حاصل ضرب مصفوفة المعادلات مضروباً في مصفوفة المـــتغيرات يـــساوي مصفوفة النواتج ومن ثم نوجد معكوس مصفوفة المعـــاملات ونـــضربه في طـــرفي المعادلة في الصورة السابقة ومن تساوي المصفوفتين نحصل على الحل .
- لحل نظام المعادلات باستخدام المحددات نرتب المعادلات أولاً ثم نوجـــد محـــددة المعاملات وبعدها نوجد محددات المتغيرات باستبدال معاملات المـــتغير بـــالنواتج ويكون كل قيمة متغير هو ناتج قسمة محددته على محددة المعاملات .

تمارين

1) أثبت أن كل مصفوفة مما يأتي هي معكوس نفسها : ـ

$$a)\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

2) إذا كانت $A = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ أوجد الآتي : ـ

$$a)\, A^{-1} \qquad b)\, B^{-1} \qquad c)\, A^{-1} \times B^{-1}$$

3) أوجد معكوس المصفوفات التالية : ـ

$$a)\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \qquad b)\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \qquad c)\begin{bmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$d)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{bmatrix} \qquad e)\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

4) حل نظام المعادلات التالية باستخدام المصفوفات ثم باستخدام المحددات : ـ

$$a)\quad \begin{aligned} x + y + z &= 2 \\ 2x + y + z &= 3 \\ 5x - 2y - z &= 6 \end{aligned} \qquad b)\quad \begin{aligned} x + 2y &= z + 6 \\ 2x - y + z &= 5 \\ 3x + 5y - 7z &= 12 \end{aligned}$$

$$c)\quad \begin{aligned} 2x + y - 2z &= 10 \\ 3x + 2y - 2z &= 1 \\ 5x + 4y + 3z &= 4 \end{aligned}$$

5) حل زوج كل من المعادلات التالية باستخدام المصفوفات ثم بالمحددات : ـ

a) $\begin{aligned} 3x - 5y &= 1 \\ 2x - y &= 1 \end{aligned}$

b) $\begin{aligned} x + 4y &= 5 \\ 3x - 2y &= 1 \end{aligned}$

c) $\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - y &= 5 \end{aligned}$

d) $\begin{aligned} 2x - 3y &= 8 \\ 3x + y &= 1 \end{aligned}$

e) $\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ 2x - y &= 7 \end{aligned}$

f) $\begin{aligned} x &= 12 \\ y &= x + 3 \end{aligned}$

المراجع :-

- مقدمة في الرياضيات للعلوم الإدارية ، تأليف : سعيد أحمد حسن وجمـال أحمـد الوحيش .
- الرياضيات البحته د/ جاسم محمد علي .
- الرياضبات في الاقتصاد والتجارة والعلوم الإدارية د/ أحمد الأشقر .

المصطلحات :-

- المعكوس الضربي للمصفوفة (المقلوب) **The Inverse of Amatrix**
- مصفوفة العوامل المرافقة (المرفقات) **Adjoint Matrix**
- مدور مصفوفة المرافقات (المصفوفة المساعدة) **Transpose of Adjoint Matrix**

الوحدة السادسة

التفاضل والتكامل

تمهيد

أهلاً بك عزيزي الدارس في الوحدة السادسة من مقـرر الرياضـيات للعلـوم الإدارية حيث قسمت إلى ثلاث محاضرات المحاضرة الأولى سنأخذ فيها التفاضـل أي المشتقة وأما المحاضرة الثانية سنأخذ فيها تطبيق المشتقات من حيث القـيم القـصوى وتعظيم الربح وتقليل التكاليف والمحاضرة الثالثة ستكون مع التكامل وتطبيقاته ، كما هناك تدريباً نهاية كل محاضرة وأيضاً تمارين .

أهداف الوحدة :-

ينبغي عليك أخي الدارس أن تكون قادراً على أن :-

١ ـــ توجد مشتقة الدوال باستخدام التعريف أو بقواعد الاشتقاق .

٢ ـــ توجد القيم القصوى .

٣ ـــ توجد أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة .

٤ ـــ توجد التكامل المحدد أو غير المحدد للدوال المختلفة .

٥ ـــ توجد مساحة منطقة محصورة بين منحنى الدالة والمحور السيني .

٦ ـــ توجد الدالة الأصلية باستخدام التكامل .

المحاضرة العاشرة

التفاضل Differentiation

تمهيد

أهلا بك عزيزي الدارس إلى المحاضرة العاشرة حيث ستكون مخصصة لمشتقة الدالة عن طريق التعريف وكذلك باستخدام قواعد الاشتقاق بالإضافة إلى مشتقة الدالة اللوغاريتمية والأسية والمشتقات المتتالية كما أن هناك تدريباً في نهاية المحاضرة سيساعدك على تثبيت القواعد وأيضاً لا تنسى التمارين فبادر لحلها لتنمي قدراتك ومهاراتك .

أهداف المحاضرة : -

عزيزي الدارس بعد دراستك لهذه المحاضرة ينبغي أن تكون لك القدرة على أن: -

١ ــ توجد ميل المماس .

٢ ــ توجد مشتقة دالة عن طريق تعريف المشتقة .

٣ ــ توجد مشتقة الدوال المختلفة باستخدام القواعد .

٤ ــ توجد مشتقة الدالة الأسية واللوغاريتمية .

٥ ــ توجد المشتقات المتتالية للدوال .

المحتوى العلمي :-

سنتناول أخي الكريم في هذه المحاضرة المواضيع التالية :ـــ

- ميل المماس عند نقطة التماس .
- تعريف مشتقة الدالة وكيفية إيجاد المشتقة عن طريق التعريف .
- قواعد اشتقاق الدوال واستخدامها في إيجاد مشتقة الدالة .

مشتقة الدالة الأسية .

مشتقة الدالة اللوغاريتمية .

مشتقة الدوال المتتالية (ذات الرتب العليا) .

- تقويم ذاتي .
- تدريب .

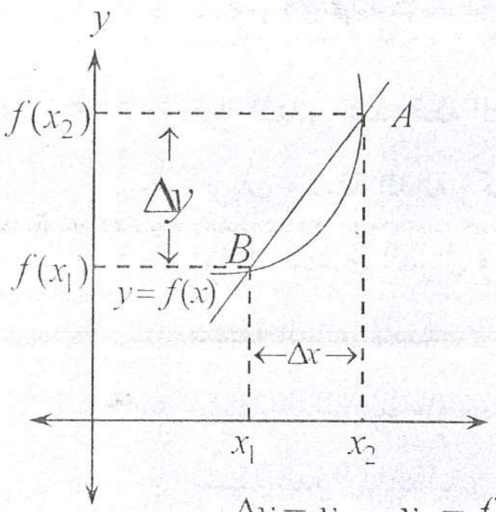
قراءات مساعدة :-

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية :-

WWW.hassona1.Jeeran.com

WWW.ou.cu.edu.eg

التفاضل Differentiation



ميل المماس ومعدل التغير : ــ

إذا كانت $y = f(x)$ دالة

موضحة بالشكل البياني التالي : ــ

عندما تتغير قيمة x من x_1 إلى x_2 يتبع ذلك تغير في قيمة الدالة $f(x)$ من y_1 إلى y_2 .

التغير في قيمة x يرمز له Δx حيث $\Delta x = x_2 - x_1$

بينما التغير في قيمة y يرمز له Δy حيث $\Delta y = y_2 - y_1 = f(x_2) - f(x_1)$

بالإمكان استنتاج قيمة x_2 من العلاقة الأولى $x_2 = x_1 + \Delta x$

$$\therefore \Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$$

تسمى القيمة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$ متوسط التغير وهو يمثل ميل القاطع AB

فإذا اقتربت النقطة A من B بحيث تكون x_1 تقترب من x_2 أي أن المسافة $\Delta x \to 0$ فإن القاطع AB سيصبح مماساً للدالة ويمكن استنتاج قيمته بأخذ النهاية لمتوسط التغير عندما Δx تقترب من الصفر . أي : ــ

$$\text{ميل المماس} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x}$$

مثال (1) : أوجد ميل المماس للدالة $f(x) = x^2$ عند $x = 1$

الحل : ــ

$$\text{ميل المماس} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^2 - x_1^2}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_1^2 + 2x_1\Delta x + \Delta x^2 - x_1^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x_1 + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_1 + \Delta x) = 2x_1 + 0 = 2x_1$$

نعوض بعد ذلك عن X_1 بقيمة $x = 2$

ميل المماس $= 2X_1 = 2\times1 = 2$

تعريف مشتقة الدالة :ـ

إذا كانت $y = f(x)$ دالة معرفة على فترة معينة فإن مشتقة الدالة Y بالنسبة لـ X

ويرمز لها بالرمز $f'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ هي

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

وتكون المشتقة موجودة إذا كانت النهاية موجودة .

مثال (2) : باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f(x) = 4x+1$ بالنسبة لـ X .

الحل : ـ

$$\because\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{4(x+h)+1-(4x+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{4x+4h+1-4x-1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{4h}{h} = \lim_{h\to 0} 4 = 4$$

$$\therefore\ f'(x) = 4$$

مثال (3) : باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة $f(x) = x^2 + 3x$ ، ثم أوجد مشتقة الدالة عند $X = 3$

الحل : ـ

$$\because\ f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$\therefore f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2+3(x+h)-(x^2+3x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2-2hx+h^2+3x+3h-x^2-3x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2hx+h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h+3)}{h}=\lim_{h\to 0}2x+h+3$$

$$\therefore f'(x)=2x+3$$

ولإيجاد المشتقة عند X = 3 نعوض في مشتقة الدالة

$$f'(3)=2\times 3+3=6+3=9$$

قواعد الاشتقاق : -

سنذكر فيما يلي قواعد للاشتقاق ستسهل علينا إيجاد المشتقات المختلفة بدلاً من العمليات المعقدة التي نجريها لبعض الدوال باستخدام التعريف : ـ

1) **مشتقة الدالة الثابتة تساوي الصفر** . لتكن $f(x)=a$ حيث a ثابت فإن:

$$f'(x)=0$$

2) **مشتقة دالة القوة** : إذا كان $f(x)=x^n$ حيث n عدد نسبي فإن :

$$f'(x)=nx^{n-1}$$

مثال (4) : أوجد مشتقة الدوال لتالية : $a)\ f(x)=x^9$ ، $b)\ y=x^{-5/3}$

الحل : ـ

$$a)\ f'(x)=9x^{9-1}=9x^8$$

$$b)\ \frac{dy}{dx}=\frac{-5}{3}x^{-5/3-1}=\frac{-5}{3}x^{\frac{-5-3}{3}}=\frac{-5}{3}x^{\frac{-8}{3}}$$

3) مشتقة حاصل ضرب ثابت في دالة هو حاصل ضرب الثابت في مشتقة الدالة أي أن :
إذا كانت $y=af(x)$ حيث a ثابت فإن :

$$\frac{dy}{dx}=af'(x)$$

مثال (5) : أوجد مشتقة الدوال التالية : $a)\ f(x)=\frac{1}{3}x$ ، $b)\ y=\frac{6}{\sqrt{x}}$

الحل : ــ

$$a)\ f'(x)=\frac{1}{3}'(x)=\frac{1}{3}x^{1-1}=\frac{1}{3}(1)=\frac{1}{3}$$

$$b)\ y=\frac{6}{\sqrt{x}}=\frac{6}{x^{\frac{1}{2}}}=6x^{\frac{-1}{2}}$$

$$\therefore\ \frac{dy}{dx}=6'(x^{\frac{-1}{2}})=6(\frac{-1}{2}x^{\frac{-1}{2}-1})$$

$$=-3x^{\frac{-1-2}{2}}=-3x^{\frac{-3}{2}}=\frac{-3}{\sqrt{x^3}}$$

4) مشتقة مجموع (طرح) عدة دوال يساوي مجموع (طرح) مشتقات الدوال .
إذا كان $y=f_1(x)\pm f_2(x)\pm\cdots\cdots\pm f_n(x)$ فإن : ــ

$$\boxed{\frac{dy}{dx}=f_1'(x)\pm f_2'(x)\pm\cdots\cdots\pm f_n'(x)}$$

مثال (6) أوجد مشتقة الدالة $f(x)=5x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+6$

الحل : ــ

$$f'(x)='(5x^3+\frac{1}{2}x^2-5x+6)=5'(x^3)+\frac{1}{2}'(x^2)-5'(x)-'(6)$$

$$=5(3x^2)+\frac{1}{2}(2x)-5(1)+0$$

$$=15x^2+x-5$$

5) مشتقة حاصل ضرب دالتين يساوي مشتقة الدالة الأولى في الثانية زائد مشتقة الثانية في الأولى . أي أن إذا كان $y = f(x) \bullet g(x)$ فإن : -

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = f'(x)\, g(x) + g'(x)\, f(x)}$$

مثال (7) : أوجد مشتقة الدوال التالية : -

$$a) f(x) = x^4(x+1) \qquad b) y = (x^2 - 2)(x+3)$$

الحل : -

$$a) f'(x) = '(x^4)(x+1) + '(x+1)x^4$$

$$= 4x^3(x+1) + (1)x^4 = 4x^4 + 4x^3 + x^4$$

$$= 5x^4 + 4x^3$$

$$b) \frac{dy}{dx} = '\left(x^2 - 2\right)(x+3) + '(x+3)\left(x^2 - 2\right)$$

$$= (2x)(x+3) + (1)\left(x^2 - 2\right)$$

$$= 2x^2 + 6x + x^2 - 2$$

$$= 3x^2 + 6x - 2$$

6) مشتقة خارج قسمة دالتين يساوي مشتقة البسط في المقام ناقص مشتقة المقام في البسط مقسوماً على مربع المقام . فإذا كانت $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ فإن : -

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)g(x) - g'(x)f(x)}{(g(x))^2}}$$

مثال (8) : أوجد مشتقة الدوال التالية : ـ

$$a)\, f(x) = \frac{x^2+3}{x} \qquad b)\, y = \frac{x^3}{x^4+5}$$

الحل : ـ

$$a)\, f'(x) = \frac{('(x^2+3)x -'(x)(x^2+3))}{x^2} = \frac{(2x)x-(1)(x^2+3)}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2-x^2-3}{x^2}$$

$$= \frac{x^2-3}{x^2}$$

$$b)\, \frac{dy}{dx} = \frac{('(x^3)(x^4+5) -'(x^4+5)x^3)}{(x^4+5)^2} = \frac{3x^2(x^4+5)-(4x^3)x^3}{(x^4+5)^2}$$

$$= \frac{3x^6+15x^2-4x^6}{(x^4+5)^2}$$

$$= \frac{15x^2-x^6}{(x^4+5)^2}$$

7) **مشتقة الجذر التربيعي لدالة يساوي مشتقة الدالة مقسوماً على ضعف الجذر التربيعي**

فإذا كانت $f(x) = \sqrt{g(x)}$ **فإن :** ـ

$$\boxed{f'(X) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}}$$

مثال (9) : أوجد مشتقة الدالة التالية : ـ

$$f(x) = \sqrt{x^3 - x + 2}$$

الحل : ـ

$$f'(x) = \frac{('(x^3 - x + 2))}{2\sqrt{x^3 - x + 2}} = \frac{3x^2 - 1}{2\sqrt{x^3 - x + 2}}$$

المشتقات المتتالية : ـ

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق فإن مشتقتها $f'(x)$ هي دالة جديدة وإذا كانت قابلة للاشتقاق فإن مشتقتها يطلق عليها المشتقة الثانية للدالة $f(x)$ ويرمز لها بالرمز

$$\frac{d^2y}{dx^2} \text{ أو } f''(x) \text{ أو } y''$$

وبالمثل فإن المشتقة الثالثة هي مشتقة المشتقة الثانية .... وهكذا .

مثال (10) : أوجد المشتقات الثلاث الأولى للدالة

$$f(x) = x^5 + 2x^3$$

الحل : ـ

المشتقة الأولى $f'(x) = ('(x^5 + 2x^3)) = 5x^4 + 6x^2$

المشتقة الثانية $f''(x) = ('(5x^4 + 6x^2)) = 20x^3 + 12x$

المشتقة الثالثة $f'''(x) = ('(20x^3 + 12x)) = 60x^2 + 12$

مشتقة الدالة اللوغاريتمية: ـ

اذا كانت لدينا دالة اللوغاريتم الطبيعي التالية : $y = Ln\, x$

فان مشتقتها تعطى بالقاعدة التالية : ـ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

ويمكن تعميمها إذا كانت لوغاريتم دالة كالتالي : ـ

إذا كانت $y = Ln\, f(x)$ ، $f(x) > 0$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

مثال (11) : أوجد مشتقة الدوال التالية : ــ

$$a)\, y = Ln(x^2 - 2x + 1) \qquad b)\, y = Ln\sqrt{x}$$

الحل : ــ

$$a)\, \frac{dy}{dx} =' \left(Ln\left(x^2 - 2x + 1\right)\right) = \frac{('(x^2 - 2x + 1))}{(x^2 - 2x + 1)}$$

$$= \frac{2x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$b)\, \frac{dy}{dx} =' \left(Ln\sqrt{x}\right) = \frac{('(\sqrt{x}))}{\sqrt{x}} = \frac{\frac{('(x))}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}$$

مشتقة الدالة الأسية : ــ

لتكن $f(x) = e^x$ دالة أسية طبيعية فإن مشتقتها هي نفسها أي أن : ــ

$$f'(x) = e^x$$

أما الدالة الأسية التي على صورة $y = a^x$ حيث a عدد حقيقي موجب ليس الواحــــد

فإن : ــ $\frac{dy}{dx} = a^x Lna$

أما إذا كان الأس عبارة عن دالة كالتالي : ــ $y = e^{g(x)}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = e^{g(x)} \cdot g'(x)$$

مثال (12) : أوجد مشتقة الدوال التالية : ــ

$$a)\, y = e^{\sqrt{x^2-1}} \qquad b)\, y = 5^{\sqrt{x}}$$

الحل : ــ

$$a)\, \frac{dy}{dx} = '\left(e^{\sqrt{x^2-1}}\right) = e^{\sqrt{x^2-1}}\,('(\sqrt{x^2-1})) = e^{\sqrt{x^2-1}}\,\frac{('(x^2-1))}{2\sqrt{x^2-1}}$$

$$= e^{\sqrt{x^2-1}}\,\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\,e^{\sqrt{x^2-1}}$$

$$b)\, \frac{dy}{dx} = '\left(5^{\sqrt{x}}\right) = 5^{\sqrt{x}}\,('(\sqrt{x}))Ln5$$

$$= 5^{\sqrt{x}}\,Ln5 \bullet \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{5^{\sqrt{x}}\,Ln5}{2\sqrt{x}}$$

تقويم ذاتي

1ــ عرف مشتقة الدالة ؟

2ــ ماذا يعطينا كلى من الآتي : ــ

ــ مشتقة الدالة الثابتة ؟

ــ مشتقة دالة القوة ؟

ــ مشتقة حاصل ضرب ثابتة في دالة ؟

ــ مشتقة مجموع عدة دوال ؟

ــ مشتقة حاصل ضرب دالتين ؟

ــ مشتقة خارج قسمة دالتين ؟

ــ مشتقة الجذر التربيعي ؟

ــ مشتقة لوغاريتم دالة ؟

ــ مشتقة الدالة الأسية ؟

تدريب

أوجد مشتقة الدالة التالية :ـ

الحل :ــ

$$y = L\,n\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}$$

$$\frac{dy}{dx} =' (L\,n\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}) = \frac{'\left(\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}\right)}{\frac{x^2-1}{\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{('(x^2-1))\sqrt{x} -'(\sqrt{x})(x^2-1)}{(\sqrt{x})^2} \times \frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$$

الجواب :ــ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-1}{2x(x^2-1)}$$ (الجواب هنا بعد عملية التبسيط)

الخلاصة :ـ

في هذه المحاضرة تعرفنا على الآتي :ـــ

ـــ ميل المماس عبارة عن نهاية متوسط التغير عندما التغير في X يسعى إلى الصفر .

ـــ مشتقة الدالة هو عبارة عن ميل المماس للدالة .

ـــ مشتقة الدالة الثانية تساوي صفراً .

ـــ مشتقة مجموع دوال يساوي مجموع مشتقات هذه الدوال .

ـــ مشتقة حاصل ضرب ثابت في دالة هو حاصل ضرب الثابت في مشتقة الدالة .

ـــ مشتقة دالة القوى X أس n (أي $f(x) = X^n$) يساوي حاصل ضرب الأس في X أس n ناقص واحد .

ـــ مشتقة حاصل ضرب دالتين يساوي مشتقة الأولى في الثانية زائد مشتقة الثانية في الأولى .

ـــ مشتقة خارج قسمة دالتين يساوي مشتقة البسط في المقام ناقص مشتقة المقام في البسط مقسوماً على مربع المقام .

ـــ مشتقة الجذر التربيعي لدالة يساوي مشتقة الدالة مقسوماً على ضعف الجذر التربيعي .

ـــ المشتقة الثانية هي عبارة عن مشتقة المشتقة الأولى للدالة والمشتقة الثالثة هي مشتقة المشتقة الثانية للدالة ، وهكذا .

ـــ مشتقة لوغاريتم دالة يساوي مشتقة الدالة مقسوماً على الدالة .

ـــ مشتقة الدالة الأسية الطبيعية يساوي حاصل ضرب الدالة الأسية في مشتقة الأس .

تمارين

1) أوجد مشتقة الدوال التالية باستخدام التعريف : ـ

$$a)\ f(x) = \frac{x-3}{2} \qquad b)\ f(x) = x^2 + 1$$

$$c)\ f(x) = \frac{1}{x} \qquad d)\ f(x) = 3x - 2x^2$$

2) أوجد مشتقة الدوال التالية باستخدام القواعد : ـ

$$a)\ f(x) = x^2 + 2x \qquad b)\ f(x) = x^7 + 3x^4 - 2$$

$$c)\ f(x) = \frac{x2}{x+3} \qquad d)\ f(x) = x^4(x+1)$$

$$e)\ f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+2}} \qquad F)\ f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

3) أوجد مشتقة الدوال التالية : ـ

$$a)\ f(x) = Ln\ (x^3 - 2x^2 - 2) \qquad b)\ f(x) = Ln\ (\sqrt{x+2}\ )$$

$$c)\ f(x) = Ln\ \frac{x^2+2}{3x} \qquad d)\ f(x) = e^{5x^2 - 3x}$$

$$E)\ f(x) = e^{\sqrt{x^3}} \qquad F)\ f(x) = 10^{x^2 - 3x + 1}$$

4) أوجد المشتقات الأربع الأولى للدوال : ـ

$$a)\ f(x) = x^9 + 5x^4 \qquad b)\ f(x) = e^x$$

المراجع :-

- أساسيات التفاضل والتكامل تأليف علي سالم عزان وسعيد عوض المعلم .
- الرياضيات البحته د/ جاسم محمد علي .

المصطلحات :-

- التفاضل : Differentiation
- ميل المماس : Slop of Tanger
- لوغاريتم طبيعي : Natural Logarithm
- نـــهاية : Limit
- دالة : Functior
- مشتقة : Derivative
- دالة أسية : Exponential Function

المحاضرة الحادية عشر

تطبيقات التفاضل

Application of Derivatives

تمهيد

أهلا وسهلاً بك أخي الدارس إلى المحاضرة الحادية عشر والتي خصصت لتطبيقات التفاضل من حيث النقاط الحرجة والقيم القصوى العظمى منها والصغرى واستخدام هذه القيم القصوى في معرفة كيفية حساب أقل تكاليف ممكنة أو حساب أكبر ربح ممكن الحصول عليه من خلال إيجاد القيم العظمى والصغرى لدالة الربح أو دالة التكلفة كما أن هناك أيضاً آخر المحاضرة سنلاحظ وجود التمارين والتدريب فعليك بحلها كي تنمي مهاراتك وقدراتك .

أهداف المحاضرة : ـ

بعد دراستك هذه المحاضرة أخي العزيز ينبغي أن تكون قادراً على الآتي: ـ

١ ــ إيجاد النقاط الحرجة للدالة .

٢ ــ إيجاد القيم القصوى ـ العظمى والصغرى) لدالة باستخدام المشتقة الأولى واختبار الإشارة حول النقاط الحرجة .

٣ ــ إيجاد القيم القصوى عبر المشتقة الثانية .

٤ ــ التعرف على دوال التكلفة والإيراد والربح وكذلك التكلفة الحدية والإيراد الحدي والربح الحدي ، والعلاقة بينها .

٥ ــ إيجاد أكبر ربح ممكن لمنتج معين .

٦ ــ إيجاد أقل تكلفة ممكنة لإنتاج منتج ما .

المحتوى العلمي :-

سنتناول في هذه المحاضرة تطبيقات التفاضل وسنقتصر على المواضيع التالية :-

النقاط الحرجة للدالة .

القيم القصوى (العظمى و الصغرى) وإيجادها باستخدام المشتقة الأولى للدالة .

القيم القصوى وإيجادها عبر المشتقة الثانية .

دوال التكلفة والإيراد والربح وكذلك الدوال الحدية لها .

تعظيم الربح وتصغير التكاليف .

تدريب .

تقويم ذاتي .

قراءات مساعدة :-

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية :-

WWW.hassona1.Jeeran.com
WWW.ou.cu.edu.eg

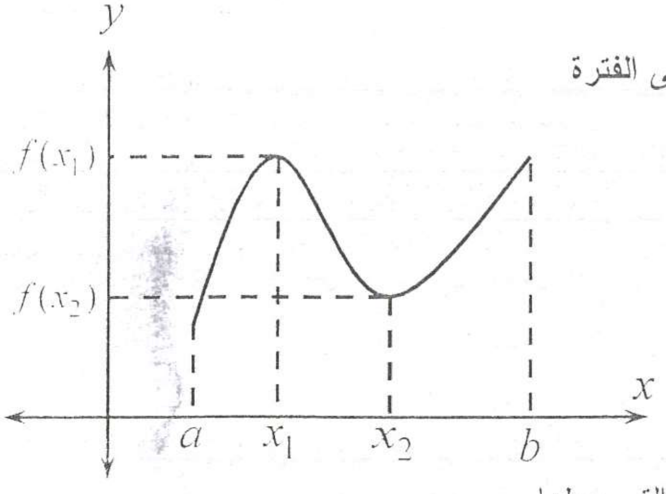
المحاضرة الحادية عشر

القيم القصوى (العظمى والصغرى)

لتكن الدالة $y = f(x)$ قابلة للاشتقاق فإن قيم X التي تجعل $f'(x) = 0$ تدعى بالنقاط الحرجة .

ملاحظة : عند النقاط الحرجة يكون المماس موازياً لمحور السينات .

لأن ميل المماس هو مشتقة الدالة وبالتالي يكون ميل المماس يساوي صفراً أي أن الزاوية التي يصنعها المماس مع الاتجاه الموجب لمحور السينات تساوي صفراً وبالتالي يكون موازياً لمحور السينات .



إذا كانت $y = f(x)$ دالة متصلة على الفترة [a ، b] ممثلة بالرسم التالي :ـ

نلاحظ من الرسم الآتي :ـ

1 ـ للدالة قيمة عظمى نسبيه عند X_1 وهي $f(x_1)$ لأنها أكبر من القيم التي حولها .

2 ـ للدالة قيمة صغرى نسبيه عند X_2 وهي $f(x_2)$ لأنها أصغر من القيم التي حولها .

3 ـ للدالة قيمة عظمى مطلقة على الفترة [a ، b] عند X = b وهي $f(b)$ لأنها أكبر قيمة للدالة على هذه الفترة .

4 ـ للدالة قيمة صغرى مطلقة على الفترة [a ، b] عند X = a وهي $f(a)$ لأنها أصغر قيمة للدالة على هذه الفترة .

لإيجاد القيم القصوى (العظمى أو الصغرى) نتبع الخطوات التالية :

1) نوجد مشتقة الدالة $f'(x)$

2) نجعل $f'(x) = 0$ ونوجد قيم X (أي نوجد النقاط الحرجة) .

3) نحدد إشارة $f'(x)$ على يمين ويسار النقاط الحرجة . فإذا تغيرت إشارة المشتقة من الموجب إلى السالب مروراً بالنقطة الحرجة كانت القيمة عند النقطة الحرجة عظمى نسبيه أما إذا تغيرت إشارة المشتقة من السالب إلى الموجب كانت النقطة الحرجة صغرى نسبيه .

مثال (13) : أوجد القيم الصغرى والعظمى النسبيه للدالة $f(x) = x^2 - 2x + 2$

الحل : ـ

نوجد مشتقة الدالة $f'(x) =' \left(x^2 - 2x + 2\right) = 2x - 2$

نضع $f'(x) = 0$

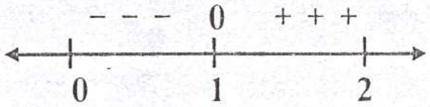
$$\therefore 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2x = 2 \Rightarrow x = 1$$

وهي تمثل نقطة حرجة

الآن نختبر إشارة المشتقة عند مرورها بالقيمة X = 1

للتسهيل يمكن تمثيل ذلك على الخط التالي : ـ

$f'(x) = 2x - 2$



أي أننا نأخذ قيمة واحدة تكفي على يمين العدد 1 مثلاً 2 أو 1.5 ونعوض بها في مشتقة الدالة ونرى الإشارة موجبة أم سالبة وكذلك نفعل بأخذ قيمة (عدد) على يسار العدد 1 .

نستنتج من الرسم أعلاه أن المشتقة الأولى غيرت إشارتها من السالب إلى الموجب مروراً بالنقطة الحرجة من اليسار إلى اليمين .

للدالة قيمة صغرى عند X = 1 ومقدارها

$$f(1) = 1^2 - 2(1) + 2 = 1 - 2 + 2 = 1$$

لاحظ أننا إذا أردنا إيجاد القيمة العظمى أو الصغرى نعوض بقيمة النقطة الحرجة في الدالة $f(x)$ وليس في $f'(x)$ لأنها ستساوي صفراً .

ملاحظة ..

مشتقة الدالة $f'(x) < 0$ على يسار 1 = X وهذا يعني أن الدالة تناقصية على يسار العدد 1 .

بينما المشتقة $f'(x) > 0$ على يمين 1 = X وهذا يعني أن الدالة تزايدية على يمين العدد 1 .

إيجاد القيم القصوى عبر المشتقة الثانية : ـ

لإيجاد القيم القصوى عبر المشتقة الثانية نتبع الخطوات التالية : ـ

1) نوجد المشتقة الأولى للدالة $f'(x)$

2) نوجد قيم X التي تجعل المشتقة الأولى تساوي الصفر $f'(x) = 0$ (ايجاد النقاط الحرجة) .

3) نوجد المشتقة الثانية للدالة $f''(x)$

4) نعوض بالقيمة الحرجة في دالة المشتقة الثانية فنحصل على إحدى النتائج التالية : ــ

a) إذا كانت إشارة المشتقة الثانية عند النقطة الحرجة موجبة أي $f''(b) > 0$ حيث $f'(b) = 0$ فإن للدالة قيمة صغرى نسبيه عند X = b .

b) إما إذا كانت إشارة المشتقة الثانية عند النقطة الحرجة سالبة أي $f''(b) < 0$ حيث $f'(b) = 0$ فإن للدالة قيمة عظمى نسبيه عند X = b .

c) إذا كان $f''(b) = 0$ حيث $f'(b) = 0$ لا نستطيع تحديد القيمة القصوى

مثال (14) : أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$

الحل : ــ

نوجد المشتقة الأولى

$$f'(x) =' (\frac{1}{3}x^3 - x^2) = \frac{1}{3}(3x^2) - 2x = x^2 - 2x$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\therefore x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0$$

إذا النقاط الحرجة هي X = 2 ، X = 0

نوجد المشتقة الثانية

$$f''(x) =' (x^2 - 2x) = 2x - 2$$

نعوض أولاً X = 0 في المشتقة الثانية

$$f''(0) = 2(0) - 2 = 0 - 2 = -2 < 0$$

إذا للدالة قيمة عظمى نسبيه عند X = 0 مقدارها

$$f(0) = \frac{1}{3}(0)^3 - (0)^2 = 0$$

نعوض الآن X = 2 في المشتقة الثانية

$$f''(2) = 2(2) - 2 = 4 - 2 = 2 > 0$$

إذا للدالة قيمة صغرى نسبيه عند X = 2 مقدارها

$$f(2) = \frac{1}{3}(2)^3 - (2)^2 = \frac{8}{3} - 4 = \frac{8-12}{3} = \frac{-4}{3}$$

تطبيقات على القيم القصوى : ـ

هناك الكثير من المسائل العملية يستخدم فيها القيم القصوى . ومنها ما يسمى بتعظيم الربح وتصغير التكلفة في الاقتصاد وسوف نستعرض هنا بعض هذه التطبيقات .

هناك ثلاث دوال ذات أهمية للمنتج وهي : ــ

C(x) وهي التكلفة الكلية لإنتاج X من وحدات الإنتاج .

R(x) وهي الإيراد الكلي الناتج من بيع X من وحدات الإنتاج .

P(x) وهي الربح الكلي الناتج من بيع X من الوحدات المنتجة .

وتسمى هذه الدوال على التوالي بدالة التكلفة ودالة الإيراد ودالة الربح .

وتكون هذه الدوال مرتبطة حسب العلاقة التالية : ــ

$$P(x) = R(x) - C(x)$$

أي الربح = الإيراد – التكلفة .

وتسمى مشتقة C(x) بالتكلفة الحدية $C'(x)$

ومشتقة R(x) بالإيراد الحدي $R'(x)$

ومشتقة P(x) بالربح الحدي $P'(x)$

وإذا تم بيع جميع الوحدات المنتجة نحصل على العلاقة التالية : ــ

$$P'(x) = R'(x) - C'(x)$$

أي : الربح الحدي = الإيراد الحدي – التكلفة الحدية

مثال (15) : ينتج مصنعاً محدود الإمكانيات بسبب وسائل الإنتاج ما لا يزيد عن 80 وحدة يومياً ، فإذا كانت دالتا التكلفة اليومية C(x) والإيراد اليومي R(x) هي

$$C(x) = x^2 + 2x + 200$$

$$R(x) = 102x - x^2$$

فاذا علمت أن كل الوحدات المنتجة يتم بيعها ، كم وحدة يجب أن ينتجها المصنع ليحصل على أكبر ربح ممكن ؟

الحل : ــ

بما أن الربح = الإيراد – التكلفة

لاحظ أن $X < 80$ $\qquad \therefore P(x) = R(x) - C(x)$

$$\therefore P(x) = (102x - x^2) - (x^2 + 2x + 200)$$
$$= 102x - x^2 - x^2 - 2x - 200$$
$$= 100x - 2x^2 - 200$$

نوجد الآن القيمة العظمى لدالة الربح

$$P'(x) =' (100x - 2x^2 - 200)$$
$$= 100 - 4x$$

نضع $P'(x) = 0$

$$100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25$$

نوجد المشتقة الثانية لدالة الربح للتأكد أن عند X = 25 هناك قيمة عظمى (أكبر ربح) .

$$P''(x) =' (100 - 4x)$$
$$= -4$$
$$\therefore P''(25) = -4 < 0$$

إذا هناك قيمة عظمى لدالة الربح عند X = 25

إذا المصنع يجب أن ينتج 25 وحدة للحصول على أكبر ربح ممكن .

مثال (16) : وجد مصنع لإنتاج لعب الأطفال أنه عندما ينتج X من اللعب كل يوم تكون التكاليف كالآتي : ــ

1000 ريال تكاليف ثابتة ، و 20 ريال لكل لعبة تكلفة العمال ، و 8000 ريال مقابل الإعلانات . كم عدد اللعب التي يجب أن ينتجها يومياً لكي تكون التكاليف الكلية أقل ما يمكن ؟

الحل : ــ

بما أن عدد اللعب المنتجة يومياً X

إذا التكلفة الكلية = التكلفة الثابتة + تكلفة العمال + تكلفة الإعلان

التكلفة الثابتة = 1000

تكلفة العمال = 20x

تكلفة الإعلان = $\frac{8000}{x}$

إذا تصبح دالة التكلفة كالتالي : ــ

$$C(x) = 1000 + 20x + \frac{8000}{x}$$

لإيجاد أقل تكلفة ممكنة علينا إيجاد القيمة الصغرى لدالة التكلفة .

نوجد النقاط الحرجة

$$C'(x) =' (1000 + 20x + \frac{8000}{x})$$

$$=' (1000) +' (20x) +' (8000x^{-1})$$

$$= 0 + 20 + 8000(-x^{-2}) = 20 - \frac{8000}{x^2}$$

نضع $C'(x) = 0$

$$20 - \frac{8000}{x^2} = 0 \Rightarrow 20 = \frac{8000}{x^2}$$

$$20x^2 = 8000 \Rightarrow x^2 = 400 \Rightarrow x = \pm 20$$

ولأنه لا يمكن أن يكون الإنتاج عدد سالب

إذا النقطة الحرجة الوحيدة هي **X = 20**

نوجد المشتقة الثانية للتأكد من أنها قيمة صغرى

$$C''(x) =' (20 - \frac{8000}{x^2}) =' (20 - 8000x^{-2})$$

$$= 0 - 8000(-2x^{-3}) = \frac{16000}{x^3}$$

$$C''(20) = \frac{16000}{(20)^3} = \frac{16000}{8000} = 2 > 0$$

إذاً عند **X = 20** هناك قيمة صغرى

إذاً عدد اللعب المطلوب إنتاجها لتجعل التكاليف اليومية أقل ما يمكن هي ٢٠ لعبة .

تقويم ذاتي

ـ ماذا نقصد بالنقاط الحرجة ؟

ـ كيف نوجد القيم القصوى عبر المشتقة الثانية ؟

ـ ماذا نقصد بدوال التكلفة والإيراد والربح الحدية ؟

ـ ما العلاقة التي تربط بين التكلفة والإيراد والربح ؟

تدريب

أوجد القيم القصوى للدالة $f(x) = x^4 - x^2 - 2$

الحل : ـ

نوجد المشتقة الأولى ثم نوجد النقاط الحرجة

$$f'(x) = 4x^3 - 2x$$

$$2x(2x2 - 1) = 0$$

بعد إيجاد النقاط الحرجة جد المشتقة الثانية واختبر النقاط الحرجة إن كانت صغرى أو عظمى .

الجواب : ـ

للدالة قيمة عظمى نسبية عند X = 0 وقيمتها تساوي 2- وللدالة قيمتان صغرتان نسبيتان عند $x = \frac{1}{\sqrt{x}}$ وقيمتها $-\frac{9}{4}$ وعند $x = -\frac{1}{\sqrt{x}}$ وقيمتها $-\frac{9}{4}$

الخلاصة :ـ

بعد دراستك لهذه المحاضرة يمكن تلخيص ابرز ما أعطي فيها : ـــ

ـــ النقاط الحرجة هي قيم X التي تجعل $f'(x) = 0$

ـــ يمكن معرفة القيم القصوى لدالة من خلال إيجاد النقاط الحرجة واختبار إشارة المشتقة من اليسار إلى اليمين مروراً بالنقطة الحرجة .

ـــ ويمكن أيضا معرفة القيم القصوى من خلال التعويض بالقيم الحرجة في المشتقة الثانية .

ـــ العلاقة بين دالة التكلفة ودالة الإيراد ودالة الربح هي الربح = الإيراد ـــ التكلفة .

تمارين

1) أوجد النقاط الحرجة والقيم القصوى والصغرى والعظمى إن وجدت للدوال التالية : ـ

$$a)\ f(x) = x^3 - 3x^2 \qquad b)\ f(x) = x^2 - 4x + 2$$

$$c)\ f(x) = x^4$$

2) إذا كان الإيراد الكلي والتكلفة الكلية لإنتاج X وحدة هي : ـ

$$R(x) = 40x - x^2$$

$$C(x) = 10 + 5x + \frac{x^2}{4}$$

على التوالي . ما هي عدد الوحدات اللازم إنتاجها للحصول على أكبر ربح ممكن ؟

٣) افرض أن دالتي التكلفة والإيراد لمنتج مقدره بالريالات هي : ـ

$$C(x) = 3000 + \frac{x^2}{2}$$

$$R(x) = 350 + \frac{x^2}{20}$$

أوجد التكلفة الحدية والإيراد الحدي والربح الحدي ؟

4) قرر صاحب أحد الشركات أن يبيع X من الوحدات لسلعة معينة بسعر $P = \frac{400}{x+2}$ للوحدة الواحدة .

a) ما هي دالة الإيراد الكلي (R (X .

b) ما هو الإيراد الحدي عندما ينتج 18 وحدة .

المراجع :ـ

ـ أساسيات التفاضل والتكامل تأليف علي سالم عزان وسعيد عوض المعلم .

ـ الرياضيات البحته د/ جاسم محمد علي .

المصطلحات :ـ

ـ قيمة حرجة : Critical value

ـ قيمة عظمى مطلقة : Absolute maximum value

ـ قيمة صغرى مطلقة : Absolute minimum value

ـ تكلفة : Cost

ـ تكلفة حديه : Marginal cost

ـ تعظيم : Maximization

ـ تصغير . Minization

ـ إنتاج : Production

ـ ربح : Profit

ـ تعظيم الربح : Profit maximization

المحاضرة الثانية عشر

The Integration التكامل

تمهيد

أهلاً وسهلاً بك أخي الكريم إلى المحاضرة الثانية عشر والـتي سنأخذك مع التكامل وتطبيقاته حيث سندرس التكامل غير المحدد وكذلك حساب التكامل المحدد ومنه إلى بعض تطبيقات التكامل حيث سنتعرف على كيفية إيجاد الدالة الأصلية وتحديد ثابت التكامل وكذلك كيفية حساب المناطق المستوية المحصورة بين منحنى دالة والمحور السيني . وكما هناك تدريباً وفي الأخير تمارين نرجو منك حلها .

أهداف المحاضرة : ـ

بعد دراستك أخي العزيز لهذه المحاضرة ينبغي عليك أن تكون قادراً على الآتي : ـ

١ ــ التعرف على التكامل غير المحدد وخواصه .

٢ ــ إيجاد قيمة التكامل غير المحدد .

٣ ــ إيجاد الدالة الأصلية وتحديد ثابت التكامل .

٤ ــ حساب المساحة المحصورة بين المنحنى والمحور السيني باستخدام التكامل .

المحتوى العلمي : ـ

سنتناول في هذه المحاضرة جملة من المواضيع وهي كالتالي : ـــ

- تعريف التكامل غير المحدد وكيفية إيجاده .
- التكامل المحدد وكيفية حسابه .
- استخدام التكامل في إيجاد الدالة الأصلية وتحديد ثابت التكامل .
- حساب مساحة منحنى محصور بين منحنى دالة والمحور السيني باستخدام التكامل .
- تقويم ذاتي .
- تدريب .

قراءات مساعدة : ـ

لمزيد من الإطلاع عليك بزيارة المواقع التالية : ـ

WWW.hassona1.Jeeran.com
WWW.ou.cu.edu.eg

التكامل غير المحدد :ـ

لقد تعرفنا سابقاً أن هناك كثير من العمليات المتعاكسة مثل الجمع والطرح والـضرب والقسمة وبالمثل فإن هناك عملية معاكسة للاشتقاق (التفاضل) وهي عملية التكامل .

وعلى هذا الأساس فإننا في عملية التكامل نبحث عن الدالة الأصلية التي أعطيت لنا مشتقتها الأولى مثلاً :

إذا كان $g(x)=3x^2$ ، $f(x)=x^3+2$ نلاحظ أن $f'(x)=3x^2$ وهـي مـساوية للدالة $g(x)$ أي أن $f'(x)=g(x)$

وهنا نقول أن $f(x)$ دالة أصلية للدالة $g(x)$

تعريف :ـ

إذا كانت الدالة $g(x)$ معرفة على الفترة [a ، b] فإذا وجدت دالة $f(x)$ متصلة على [a ، b] وقابلة للاشتقاق على] a ، b [بحيث :

$$f'(x)=g(x) \qquad \forall x\in]a, b[$$ فإن

$f(x)$ دالة أصلية ((أو تكامل غير محدد)) للدالة $g(x)$ ونرمز لها بالرمز

$$\int g(x)\, dx=f(x)$$

لتكن $g(x)=2x$ لنبحث الآن عن التكامل غير المحدد للدالـة $g(x)$. سـنجد هنـا الكثير من الدوال مثل :

$$f_1(x)=x^2 \qquad f_2(x)=x^2+3 \qquad f_3(x)=x^2-1 \cdots\cdots$$

لأن

$$f_1'(x)=2x \qquad f_2'(x)=2x \qquad f_3'(x)=2x$$

ونلاحظ هنا أن الدوال $f(x)$ السابقة تختلف فقط في قيمة الثابت .

ويمكن هنا أن نصيغ الدالة f كالتالي :ـ

$f(x)=x^2+c$ حيث C ثابت أي أن : حيث C ثابت التكامل $\boxed{\int 2x dx=x^2+c}$

مثال (1) : أوجد التكاملات غير المحددة التالية : ــ

$$a)\int 6dx \qquad b)\int 4x^3dx \qquad c)x^4dx$$

الحل : ــ

$$a)\int 6dx = 6x + c$$

لأن $('(6x+c)) = 6$

$$b)\int 4x^3dx = x^4 + c$$

لأن $('(x4+c)) = 4x^3$

$$c)\int x^4dx = \frac{x^5}{5} + c$$

لأن $('(\frac{x^5}{5}+c)) = \frac{5x^4}{5} = x^4$

قاعدة الأس أو القوة : ــ

$$\boxed{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad , n \neq -1}$$ حيث

خواص التكامل : ــ

$$1)\int k\, g(x)\, dx = k\int g(x)\, dx$$ حيث K ثابت

$$2)\int (g_1(x) + g_2(x))dx = \int g_1(x)dx + \int g_2(x)dx$$

مثال (2) : أوجد التكاملات الآتية :

$$a)\int (6x^2 - 2x + 5)\,dx \qquad b)\int x\left(\frac{1}{x} + x^2\right)dx$$

$$c)\int\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x^2} - 3\right)dx$$

الحل : ـ

$$a)\ \int(6x^2-2x+5)\,dx=\int 6x^2dx-\int 2xdx+\int 5dx$$

$$=6\int x^2dx-2\int xdx+5\int dx$$

$$=6\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}+5x+c$$

$$=2x^3-x^2+5x+c$$

$$b)\ \int x\left(\frac{1}{x}+x^2\right)dx=\int\left(1+x^3\right)$$

$$=\int dx+\int x^3dx$$

$$=x+\frac{x^4}{4}+c$$

$$c)\ \int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{x^2}-3\right)dx=\int\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-2}-3\right)dx$$

$$=\int x^{\frac{1}{2}}dx+\int x^{-2}dx-3\int dx$$

$$=\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}+\frac{x^{-2+1}}{-2+1}-3x+c$$

$$=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^{-1}}{-1}-3x+c$$

$$=\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{1}{x}-3x+c$$

التكامل المحدد :ـ

إذا كانت الدالة g(x) متصلة على [a ، b] وكان $f(x)$ تكاملاً لـ $g(x)$ على هذه الفترة فإن :

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx = f(b) - f(a)}$$

مثال (3) : أحسب التكاملات التالية :ـ

$$a)\ \int_0^4 x^3\,dx \qquad b)\ \int_1^9 \sqrt{x}\,dx$$

الحل :ـ

لإيجاد التكاملات المحددة نوجد أولاً التكامل غير المحدد ومن ثم التعويض بحدي التكامل مع ملاحظة أننا لا نكتب ثابت التكامل .

$$a)\ \int_0^4 x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1}\Big|_0^4$$

$$= \frac{x^4}{4}\Big|_0^4 = \left(\frac{4^4}{4} - \frac{0^4}{4}\right)$$

$$= 64 - 0 = 64$$

$$b)\ \int_1^9 \sqrt{x}dx = \int_1^9 x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\Big|_1^9$$

$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Big|_1^9 = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}\Big|_1^9$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{9^3} - \frac{2}{3}\sqrt{1^3} = \frac{2}{3}(27) - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{54}{3} - \frac{2}{3} = \frac{52}{3}$$

خواص التكامل المحدد :ـ

١) إذا تساوى حدي التكامل فإن قيمة التكامل تساوي صفراً أي أن :: ـ

$$\boxed{\int_a^a g(x)dx=0}$$

٢) إذا بادلنا بين حدي التكامل فإن قيمة التكامل تصبح سالبة . أي أن : ـ

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx=-\int_b^a g(x)dx}$$

٣) إذا وجد $C\in[a , b]$ وكان $b>c>a$ فإن : ـ

$$\boxed{\int_a^b g(x)dx=\int_a^c g(x)dx+\int_c^b g(x)dx}$$

مثال (4) : أحسب ما يلي : ـ

$$a)\int_0^4 (x^2-4x)dx \qquad b)\int_1^2 (t^3-2t)dt$$

الحل : ـ

$$a)\int_0^4 (x^2-4x)dx=\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}-\frac{4x^{1+1}}{2}\right)\Big|_0^4$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2\right)\Big|_0^4=\left(\frac{4^3}{3}-2(4^2)\right)-\left(\frac{0^3}{3}-2(0^2)\right)$$

$$=\frac{64}{3}-32-0=\frac{64-96}{3}=\frac{-32}{3}$$

$$b)\int_1^2 (t^3-2t)\,dt=\left(\frac{t^{3+1}}{3+1}-\frac{2t^{1+1}}{1+1}\right)\Big|_1^2$$

$$=\left(\frac{t^4}{4}-\frac{2t^2}{2}\right)\Big|_1^2=\left(\frac{2^4}{4}-2^2\right)-\left(\frac{1^4}{4}-1^2\right)$$

$$=(4-4)-\left(\frac{1}{4}-1\right)=0-\left(\frac{1-4}{4}\right)$$

$$=0-\frac{-3}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال (5) : أحسب التكاملات التالية : ــ

$$a)\int_0^2\left(6\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx \qquad b)\int_1^3\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)dx$$

الحل : ــ

$$a)\int_0^2\left(6\sqrt{x}-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx=\int_0^2\left(6x^{\frac{1}{2}}-3x^{\frac{-1}{2}}\right)dx$$

$$=\left(6\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}-3\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1}\right)\Big|_0^2$$

$$=\left(6\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-3\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right)\Big|_0^2=\left(6\left(\frac{2}{3}\right)\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}\right)\Big|_0^2$$

$$=\left(4\sqrt{x^3}-6\sqrt{x}\right)\Big|_0^2=\left(4\sqrt{2^3}-6\sqrt{2}\right)-\left(4\sqrt{0^3}-6\sqrt{0}\right)$$

$$=4\left(2\sqrt{2}\right)-6\sqrt{2}-0=8\sqrt{2}-6\sqrt{2}=2\sqrt{2}$$

$$b)\int_1^3\left(\frac{x^2-2}{x^2}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{x^2}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)dx$$

$$=\int_1^3\left(1-2x^{-2}\right)dx=\left(x-\frac{2x^{-2+1}}{-2+1}\right)\Big|_1^3$$

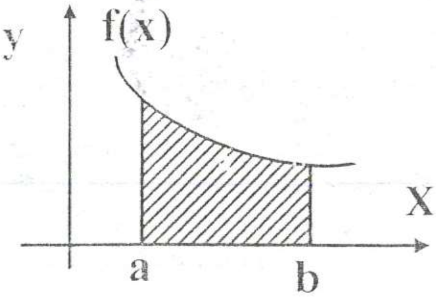
$$=\left(x-\frac{2x^{-1}}{-1}\right)\Big|_1^3=\left(x+\frac{2}{x}\right)\Big|_1^3$$

$$=\left(3+\frac{2}{3}\right)-\left(1+\frac{2}{1}\right)=\frac{9+2}{3}-3$$

$$=\frac{11-9}{3}=\frac{2}{3}$$

تطبيقات التكامل في المساحات :ـ

سنتعرف هنا على طريقة إيجاد مساحات مناطق مستوية باستخدام التكامـل المحـدد . وهذا يتطلب التعرف على موقع بيان الدالة بالنسبة للمحورين السيني والصادي . وسنقتصر هنا على المناطق المستوية بالنسبة للمحور السيني .



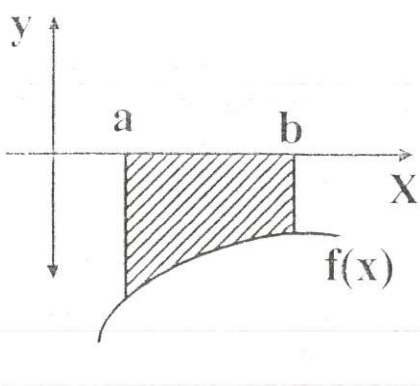
إذا كانت المنطقة واقعة تحت منحنى الدالة

ومحدودة بمحور السينات والفترة [a ، b] فإن

المساحة : $\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{سط}_a^b}$

أما إذا كانت المنطقة واقعة فوق منحنى الدالة $f(x)$ ومحصورة بمحور الـسينات فـي الفترة [a ، b] فإنه :ـ

مساحتها : $-\int_a^b f(x)dx = \text{سط}_a^b$



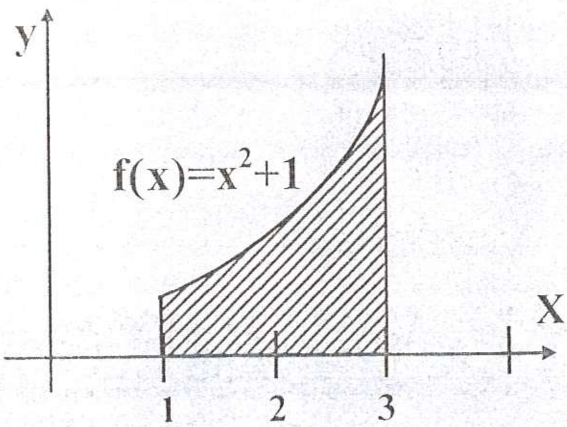
ويمكن التعبير عن السماحة المطلوبة أينما وجدت كما يلي :

$$\boxed{\int_a^b \left|f(x)\right| dx = \text{سط}_a^b}$$

مثال (6) : أحسب مساحة المنطقة المستوية المحصورة بالمنحنى $y=x^2+1$ والمستقيمات $x=1$ ، $x=3$ ، $y=0$

الحل : ــ

$$\int_a^b |f(x)|\,dx = \text{سط}_a^b$$



$$\int_1^3 \left|x^2+1\right| dx = \text{سط}_1^3$$

$$= \left|\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_1^3\right|$$

$$= \left|\left(\frac{3^3}{3}+3\right)-\left(\frac{1^3}{3}+1\right)\right|$$

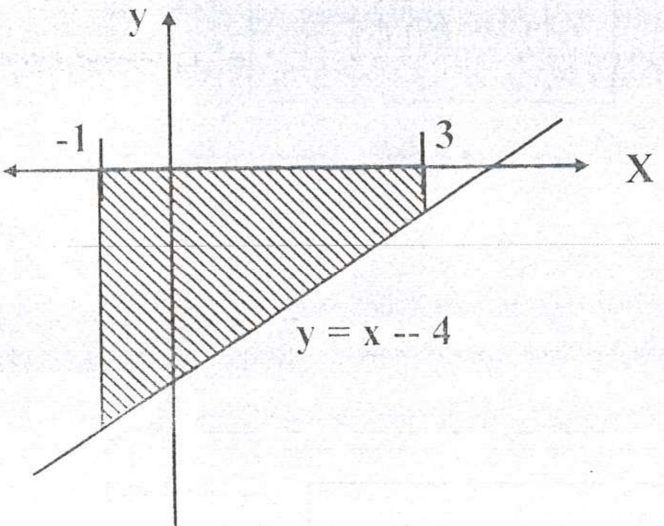
$$= \left|(9+3)-\frac{1+3}{3}\right|$$

$$= \left|12-\frac{4}{3}\right| = \left|\frac{36-4}{3}\right|$$

$$= \frac{32}{3}$$ وحدة مربعة

مثال (7) : أحسب مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمستقيمات $y=x-4$ ، $x=-1$ ، $x=3$ ، $y=0$

الحل : ــ



بما أن المنطقة واقعة تحت محور السينات

$$\therefore \text{سط}_{-1}^{3} = -\int_{-1}^{3}(x-4)\,dx$$

$$= -\left(\frac{x^2}{2}-4x\right)\Big|_{-1}^{3}$$

$$= -\left[\left(\frac{3^2}{2}-4(3)\right)-\left(\frac{(-1)^2}{2}-4(-1)\right)\right]$$

$$= -\left[\left(\frac{9}{2}-12\right)-\left(\frac{1}{2}+4\right)\right]$$

$$=-\left(\frac{9-24}{2}-\frac{1+8}{2}\right)$$

$$=-\left(\frac{-15-9}{2}\right)=-\frac{-24}{2}$$

$=12$ وحدة مربعة

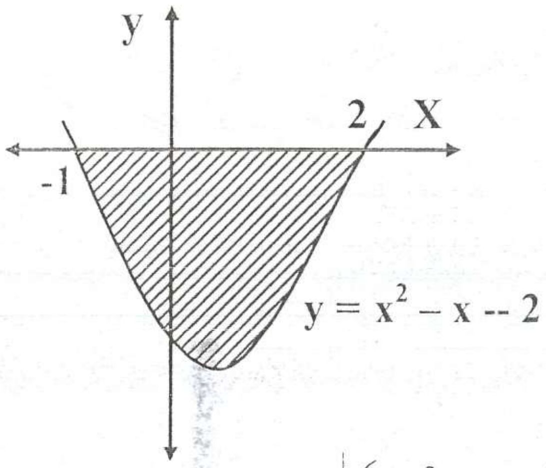
مثال (8) : أحسب المساحة المحصورة بالمنحنى $y=x^2-x-2$ ومحور السينات

الحل : ـ

يجب أن نحدد حدود التكامل لحساب المساحة وهي نقاط التقاطع بـين المنحنـى والمحـور السيني بوضع $x^2-x-2=0 \Leftarrow y=0$

$$(x+1)(x-2)=0$$

$$\therefore x=-1 \text{ ، } x=2$$



$$\int_{-1}^{2}\left|x^2-x-2\right|dx = \text{سـَط}_{-1}^{2}$$

$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{-1}^{2}\right|$$

$$=\left|\left(\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}-2(2)\right)-\left(\frac{(-1)^3}{3}-\frac{(-1)^2}{2}-2(-1)\right)\right|$$

$$=\left|\left(\frac{8}{3}-2-4\right)-\left(-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2\right)\right|$$

$$=\left|\frac{8}{3}-6+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right|=\left|\frac{9}{3}-8+\frac{1}{2}\right|$$

$$=\left|3-8+\frac{1}{2}\right|=\left|-5+\frac{1}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{-10+1}{2}\right|=\left|\frac{-9}{2}\right|=\frac{9}{2}$$ وحدة مربعة

إيجاد ثابت التكامل وتحديد الدالة الأصلية :ـ

لتكن $f(x)$ هو التكامل غير المحدد (الدالة الأصلية) للدالة $g(x)$ أي أن $f'(x)=g(x)$

$$\therefore \int g(x)\,dx = f(x)+c$$

ويمكن إيجاد قيمة ثابت التكامل C من خلال بعض المعلومات عن الدالة الأصلية والتي يمكن كتابتها : ـ

$$y=f(x)+c$$

مثال (9) : أوجد الدالة الأصلية للدالة $g(x)=4x-2$ إذا علمت أن منحناها يقطع المحور الصادي عند النقطة 3 .

الحل : ـ

لإيجاد الدالة الأصلية نوجد تكامل الدالة $g(x)$

$$y=\int g(x)\,dx=\int (4x-2)\,dx$$

$$y=\frac{4x^2}{2}-2x+c=2x^2-2x+c$$

بما أن منحنى الدالة يقطع المحور الصادي عند 3 أي أنه عندما $X = 0$ فإن $y = 3$

نعوض بقيمة X ، y في الدالة الناتجة فتصبح

$$3=2(0)^2-2(0)+c$$

$$3=0-0+c \Rightarrow c=3$$

إذاً الدالة الأصلية هي

$$y=2x^2-x+3$$

مثال (10) : إذا علمت أن $f'(x)=x+\frac{1}{x^2}$. فأوجد $f(x)$ إذا كان منحنى الدالة يمر بالنقطة (7 ، 2-) .

الحل : ـ

$$f(x)=\int f'(x)\,dx$$

$$\therefore f(x)=\int \left(x+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= \int \left(x + x^{-2}\right) dx$$

$$= \frac{x^{1+1}}{1+1} + \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + c$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + c$$

بما أن الدالة تمر بالنقطة (7 ، 2-) أي أنها تحقق الدالة

$$\therefore f(-2) = 7$$

$$\therefore f(-2) = \frac{1}{2}(-2)^2 - \frac{1}{-2} + c = 7$$

$$\therefore \frac{1}{2}(4) + \frac{1}{2} + c = 7$$

$$2 + \frac{1}{2} + c = 7$$

$$\therefore c = 7 - 2 - \frac{1}{2} = 5 - \frac{1}{2}$$

$$\therefore C = \frac{10-1}{2} = \frac{9}{2}$$

وبالنعويض عن C في الدالة تصبح

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + \frac{9}{2}$$

تقويم ذاتي

- ماذا نقصد بالتكامل غير المحدد ؟
- كيف نوجد التكامل المحدد ؟
- كيف نحسب مساحة منطقة محصورة بين منحى دالة والمحور السيني ؟

تدريب

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنى $y = 4x^2 - 4$ والمحور السيني .

الحل : ــ

نوجد تقاطع المحور السيني مع منحنى الدالة والتي تمثل حدود التكامل وذلك بوضع y = 0

$$\therefore y = 4x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\therefore x = 1 \quad ، \quad x = -1$$

$$\therefore \text{سط}_{-1}^{1} = -\int_{-1}^{1} \left| 4x^2 - 4 \right| dx$$

الجواب سـط = $\frac{16}{4}$ وحدة مربعة

الخلاصة :-

بعد دراستك لهذه المحاضرة فإننا يمكن أن نخرج من هذه المحاضرة بالآتي :ــ

ــ إذا كان $f(x)$ متصلة على فترة وأن $f'(x) = g(x)$ على هذه الفترة فإن $\int g(x)\,dx = f(x)$ ستسمى دالة أصلية أو تكامل غير محدد .

ــ التكامل المحدد يمثل قيمة حقيقية والتكامل غير المحدد يمثل دالة .

ــ تكامل دالة على صورة X أس n يساوي X أس n + 1 مقسوماً على n + 1 .

ــ تكامل مجموع عدة دوال يساوي مجموع تكاملات هذه الدوال .

ــ لحساب التكامل المحدد نوجد أولاً التكامل غير المحدد ثم نعوض بالحد الأعلى ونطرح منه القيمة الناتجة بعد التعويض بالحد الأدنى للتكامل .

ــ يمكن تحديد ثابت التكامل من خلال بعض المعلومات عند دالة كنقطة تقع على منحناها مثلاً .... وغيرها

ــ يمكن حساب المساحة المحصورة بين منحنى دالة والمحور السيني من خلال إيجاد التكامل المحدد لقاعدة هذه الدالة وحدود التكامل تصبح نقاط تقاطع الدالة مع المحور السيني .

تمارين

1) أوجد التكاملات الآتية : ـ

$$a)\int\left(x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}-1\right)dx$$

$$b)\int\left(x^{3}+2x+3\right)dx$$

$$c)\int\left(\frac{1}{x^{3}}+\frac{3}{x^{2}}-5\right)dx$$

$$d)\int\left(\sqrt{x}+x^{2}\right)dx$$

2) احسب التكاملات الآتية : ـ

$$a)\int_{-1}^{4}\left(\sqrt{x}+x^{2}\right)dx \qquad b)\int_{1}^{5}\left(3x^{2}-2x+4\right)dx$$

$$c)\int_{-4}^{4}\left(x^{2}-3\right)dx \qquad d)\int_{1}^{9}\sqrt{x}\,dx$$

3) أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات والمستقيمين في كل مما يأتي : ـ

$a)\ y=3x^{2}-x \quad , \quad x=2 \ , \ x=3$

$b)\ y=5 \quad , \quad x=-2 \ , \ x=2$

$c)\ y=x^{2}+3 \quad , \quad x=1 \ , \ x=2$

4) احسب المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات للآتي : ـ

$a)\ y=x^{2}-1 \qquad b)\ y=x^{2}-4$

$c)\ y=x^{3}+2x^{2} \qquad d)\ y=x^{3}-9x$

$e)\ y=x^{2}-5x+6$

5) لتكن $f'(x)=3x^{2}-2x+1$ ومنحنى الدالة $f(x)$ يمر بالنقطة (5 ، -2) فأوجد $f(x)$.

المراجع :ـ

ـ أساسيات التفاضل والتكامل تأليف علي سالم عزان وسعيد عوض المعلم .

ـ الرياضيات البحته د/ جاسم محمد علي .

المصطلحات :ـ

ـ التكامل : **Integration**

ـ تكامل غير محدود : **Infinite Integral**

ـ تكامل محدود : **Finite Integral**

ـ الدالة الأصلية : **Ant derivative of Function**

ـ حد أدنى : **Lower Bound**

ـ حد أعلى : **Upper Bound**

ـ ثابت التكامل : **Constant of Integration**